.En nuestro aprendizaje de aritmética tratamos con números *reales*, tales como 3, -5, $\frac{4}{7}$,Π, etc., los cuales pueden usarse para medir distancias en una u otra dirección desde un punto fijo. Un número tal como *x* que satisface

$$x^2 = -4 \qquad [1]$$

no es un número real y se acostumbra a llamarlo número *imaginario*. Para tratar con los números imaginarios se define una *unidad imaginaria*, representada por *j*, de la manera siguiente

$$j = \sqrt{-1} \qquad [2]$$

Así tendremos $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$, etc. Debemos reparar en que los matemáticos usan el símbolo i para la unidad imaginaria, pero en cálculos sobre electricidad, éste podría ser confundido con la corriente.) Un número imaginario se define como el producto de *j* por un número real, tal como $x = j2$. En este caso, $x^2 = (j2)^2 = -4$, y por tanto *x* es la solución de [1]

Un número complejo es la suma de un número real y uno imaginario, tal como

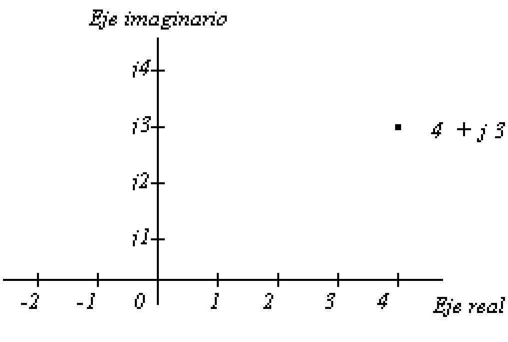
$$A = a + jb \qquad [3]$$

donde *a* y *b* son reales. El número complejo *A* tiene una *parte real, a,* y una *parte imaginaria, b,* lo que a veces se expresa como

$$a = \operatorname{Re} A$$
$$b = \operatorname{Im} A$$

Es importante notar que ambas partes son reales, a pesar de sus nombres.

El número complejo $a + jb$ puede representarse en un plano coordenado rectangular, o *plano complejo*, interpretándolo como un punto (a, b) . Es decir, la coordenada horizontal es *a* y la coordenada vertical es *b*, como se ve en la figura 1, para el caso $4 + j3$. Debido a su analogía con los puntos graficados en un sistema coordenado rectangular, a [3], suele llamársele la *forma rectangular* del número complejo *A*.



Firgura 1

El número complejo $A = a + jb$ puede también localizarse unívocamente en el plano complejo especificando su distancia r sobre una línea recta desde el origen y el ángulo θ que esta línea forma con el eje real, como lo muestra la figura 2.

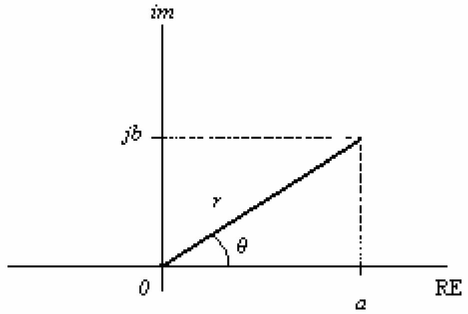


Figura 2

En el triángulo rectángulo así formado, vemos que

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad [4]$$

$$\theta = ArcTAN\,\frac{b}{a}$$

y que

$$a = r\cos\theta \qquad [5]$$

$$b = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Denotamos esta representación del número complejo por

$$A = r\angle\theta \qquad [6]$$

llamada la *forma polar*. El número r se llama *amplitud* o *módulo,* y suele expresarse por

$$r = |A|$$

El número θ es el *ángulo* o *argumento* y con frecuencia se denota

$$\theta = \mathrm{ang}\,A = \arg A$$

Se puede convertir con facilidad de la forma rectangular a la polar o viceversa, por medio de [4] y [5]. Por ejemplo, el número A representado en la figura 3 está dado por

$$A = 4 + j3 = 5\angle 36.9°$$

ya que por [4]

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\theta = ArcTAN\,\frac{3}{4} = 36.9°$$

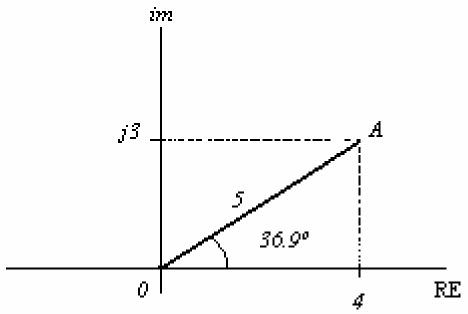


Figura 3

El *conjugado* del número complejo $A = a + jb$ está definido por

$$A^* = a - jb \qquad [7]$$

es decir, *j* reemplazada por *–j*. Puesto que tenemos

$$\left|A^*\right| = \sqrt{a^2 + \left(-b^2\right)} = \sqrt{a^2 + b^2} = \left|A\right|$$

y

$$\arg A^* = arcTAN\left(\frac{-b}{a}\right) = -arcTAN\left(\frac{b}{a}\right) = -\arg A$$

$$\left(r\angle\theta\right)^* = r\angle -\theta \qquad [8]$$

Podemos notar de la definición que si A^* es el conjugado de A, entonces A es conjugado de A^*. Es decir, $\left(A^*\right)^* = A$.

Las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división se aplican a los números complejos exactamente como se aplican a los números reales. En el caso de la adición y la sustracción podemos escribir, en general,

$$\left(a + jb\right) + \left(c + jd\right) = \left(a + c\right) + j\left(b + d\right) \qquad [9]$$

y

$$\left(a + jb\right) - \left(c + jd\right) = \left(a - c\right) + j\left(b - d\right) \qquad [10]$$

Es decir, para sumar (o restar) dos números complejos, basta con sumar (o restar) sus partes reales y sus partes imaginarias.

Por ejemplo, sean $A = 3 + j4$ y $B = 4 - j1$. Entonces

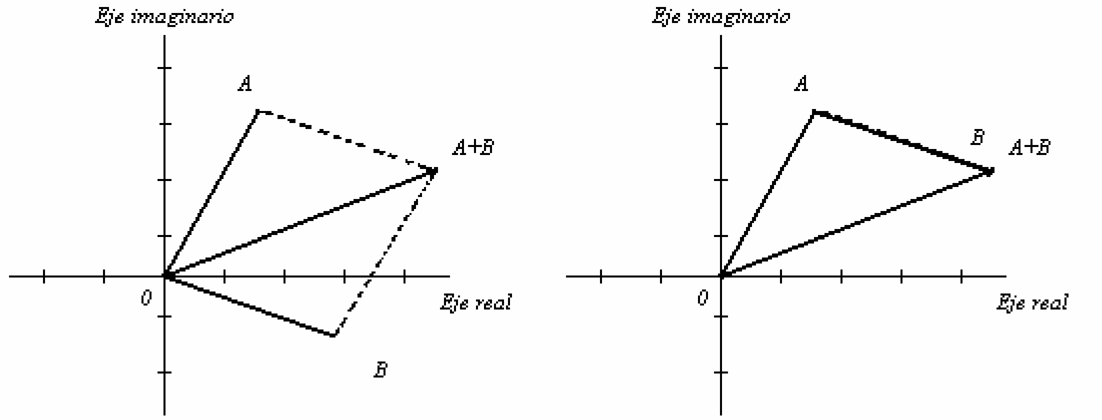
$$A + B = \left(3 + 4\right) + j\left(4 - 1\right) = 7 + j3$$

Esto puede hacerse también gráficamente, como se ven en la figura 4ª, donde los números *A* y *B* están representados como vectores desde el origen. El resultado equivale a completar el paralelogramo o a conectar los vectores de cabeza o cola, como se muestra en la figura 4b, como se podrá verificar comparando los números. Por esta razón, la suma de números complejos suele llamarse *suma vectorial*.

En el caso de la multiplicación de los números A y B dados por

$$A = a + jb = r_1 \cos\theta_1 + r_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

$$B = c + jd = r_2 \cos\theta_2 + r_2 \operatorname{sen}\theta_2 \qquad [11]$$



$$(r_1\angle\theta_1)(r_2\angle\theta_2) = r_1 r_2 \angle\theta_1 + \theta_2 \qquad [13]$$

y por tanto, podemos multiplicar dos números multiplicando sus magnitudes y sumando sus ángulos. Por este resultado vemos que

$$AA^* = (r\angle\theta)(r\angle-\theta) = r^2\angle 0 = |A|^2\angle 0$$

puesto que $|A|^2\angle 0$ es el número real $|A|^2$, tenemos

$$|A|^2 = AA^* \qquad [14]$$

La división de un número complejo entre otro, tales como

$$N = \frac{A}{B} = \frac{a + jb}{c + jd}$$

resulta un denominador irracional, puesto que $j = \sqrt{-1}$. Podemos racionalizar el denominador y desplegar las partes real e imaginaria de N escribiendo

$$N = \frac{AB^*}{BB^*} = \frac{a + jb}{c + jd} \cdot \frac{c - jd}{c - jd}$$

lo que resulta en

$$N = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2} \qquad [15]$$

Lo podemos obtener también por el método usado para calcular [13]; es decir,

$$\frac{r_1\angle\theta_1}{r_2\angle\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle\theta_1 - \theta_2 \qquad [16]$$

Como ejemplos, sean $A = 4 + j3 = 5\angle 36.9°$ y $B = 5 + j12 = 13\angle 67.4°$. Entonces tenemos

$$AB = (5)(13)\angle 36.9° + 67.4° = 65\angle 104.3°$$

y

$$\frac{A}{B} = \frac{5}{13}\angle 36.9° - 67.4° = 0.385\angle -30.5°$$

Es evidente que resulta más fácil sumar y restar números complejos en su forma rectangular y multiplicarlos y dividirlos en su forma polar. Si dos números complejos son iguales, entonces sus partes reales deben ser iguales y sus partes imaginarias también deben ser iguales. Es decir si

$$a + jb = c + jd$$

entonces

$$a - c = j(d - b)$$

lo cual requiere que

$$a = c$$
$$b = d$$

De otra manera, podríamos tener un número real igual a un número imaginario, lo cual, por supuesto es imposible. Por ejemplo si

$$1 + x + j(8 - 2x) = 3 + jy$$

entonces

$$1 + x = 3$$
$$8 - 2x = y$$

o bien $x = 2$, $y = 4$

También se puede de [15] obtener el desarrollo para el caso particular de $N = \dfrac{1}{a + jb}$ que resulta.

$$N = \frac{1}{a + jb} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) - j\left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right) \qquad [17]$$

donde debemos tener siempre en cuenta la inversión de signo de la componente imaginaria, respecto a la del denominador

Formula de Euler

Para obtener la fórmula de Euler, que es un resultado importante, comencemos con la cantidad

$$g = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta \qquad [1]$$

donde θ es real y $j = \sqrt{-1}$. Diferenciando, tenemos

$$\frac{dg}{g} = j(\cos\theta + j \operatorname{sen}\theta) = jg$$

como puede verse por [1]. Las variables en la última ecuación pueden separarse, produciendo

$$\frac{dg}{g} = jd\theta$$

Integrando, tenemos

$$\ln g = j\theta + \mathrm{K} \qquad [2]$$

donde K es una constante de integración. En [1] vemos que g = 1 cuando θ = 0, lo que debe ser válido para [2]. Es decir,

$$\ln 1 = 0 = 0 + \mathrm{K}$$

o bien $K = 0$. Por tanto, tenemos

$$\ln g = j\theta$$

o bien

$$g = e^{j\theta} \qquad [3]$$

Comparando [1] con [3], vemos que

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta \qquad [4]$$

la cual se conoce como *fórmula de Euler*. Se encuentra una forma alterna reemplazando θ por $-\theta$ como sigue

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j \operatorname{sen}(-\theta)$$

lo cual equivale a

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j \operatorname{sen}\theta \qquad [5]$$

Es evidente que [4] y [5] son conjugados.

La fórmula de Euler nos proporciona medios para obtener formas alternas de cos θ y sen θ. Por ejemplo, sumando, [4] y [5] y dividiendo el resultado entre 2, tenemos

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad [6]$$

De modo semejante, restando [5] de [4] y dividiendo el resultado entre 2j, tenemos

$$\text{sen}\,\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \qquad [7]$$

Podemos usar la fórmula de Euler también para darle claridad a la representación polar

$$A = r\angle\theta \qquad [8]$$

del número complejo

$$A = a + jb \qquad [9]$$

Esto se trató anteriormente en el apartado de números complejos, en la fórmula [5] teníamos

$$\begin{aligned} a &= r\cos\theta \\ b &= r\,\text{sen}\,\theta \end{aligned} \qquad [10]$$

Por la fórmula de Euler, podemos escribir

$$re^{j\theta} = r(\cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta)$$

$$= r\cos\theta + jr\,\text{sen}\,\theta$$

la cual, por [10] es

$$re^{j\theta} = a + jb \qquad [11]$$

Por tanto, comparando [11] con [8] y [9], tenemos

$$A = r\angle\theta = re^{j\theta} \qquad [12]$$

Este resultado nos permite obtener con facilidad las reglas de la multiplicación dadas en el apartado anterior en [13] y [16]. Se ve con claridad que si

$$A = r_1\angle\theta_1 = r_1 e^{j\theta_1}$$

y

$$B = r_2\angle\theta_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

entonces

$$AB = (r_1\angle\theta_1)(r_2\angle\theta_2)$$

$$= \left(r_1 e^{j\theta_1}\right)\left(r_2 e^{j\theta_2}\right)$$

$$= r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

$$........ = r_1 r_2 \angle\theta_1 + \theta_2$$

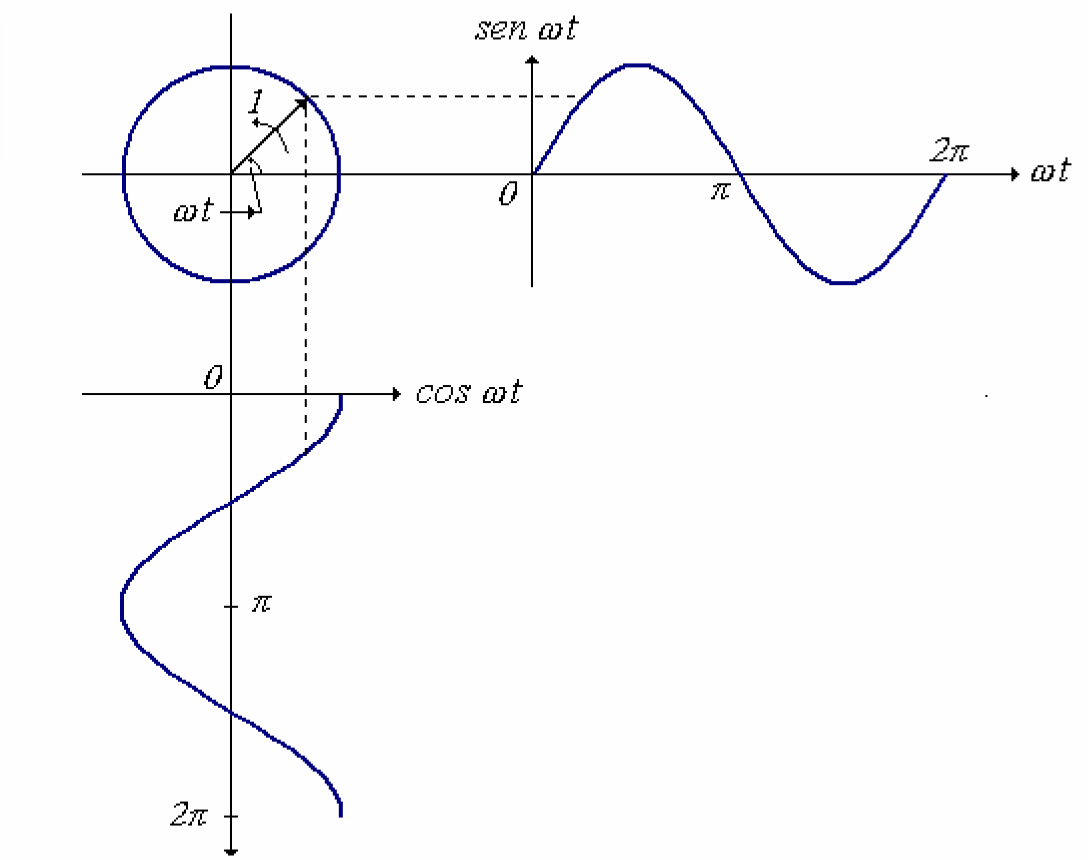
En forma análoga, podemos obtener

$$\frac{A}{B} = \frac{r_1}{r_2}\angle\theta_1 - \theta_2$$

La fórmula de Euler se ilustra gráficamente en la figura 5. Un vector unitario gira alrededor de un círculo en la dirección indicada, con una velocidad angular de ω rad/s. Por tanto, en *t* segundos se ha movido a través de un ángulo ωt como se muestra, y por tanto, se puede especificar el vector mediante $1\angle\omega t$ o $e^{j\omega t}$. Su parte real es la proyección sobre el horizontal, dada por cos ωt, y su parte imaginaria es la proyección sobre el eje vertical, dada por sen ωt. Es decir,

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

la cual es la fórmula de Euler. Las proyecciones describen las ondas coseno y seno como se ve, a medida que el vector gira.



Resumen de operaciones:

Suma	$(A+jB)+(C+jD)=(A+C)\pm j(B+D)$
Resta	$(A+jB)-(C+jD)=(A-C)\pm j(B-D)$
Multiplicación	$\lvert A\rvert\underline{\lvert b^{o}}\cdot\lvert C\rvert\underline{\lvert d^{o}}=\lvert A\cdot C\rvert\underline{\lvert b+d}$
División	$\dfrac{\lvert A\rvert\underline{\lvert b^{o}}}{\lvert C\rvert\underline{\lvert d^{o}}}=\left\lvert\dfrac{A}{C}\right\rvert\underline{\lvert b-d}$
Rec → Pol	$(A+jB)=\left\lvert\sqrt{A^2+jB^2}\right\rvert\underline{\left\lvert \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{jB}{A}\right)\right.}$
Pol → Rec	$\lvert A\rvert\underline{\lvert b^{o}}=A\cdot\cos(b)\pm A\cdot\mathrm{sen}(b)$
Inversión	$\dfrac{1}{(A+jB)}=\dfrac{A}{(A^2+B^2)}-j\dfrac{B}{(A^2+B^2)}$