TEORÍA DE LOS CIRCUITOS II

TRANSFORMADA DE LAPLACE

INDICE DE TEMAS

Página

1. ¿Por qué se emplea la Transformada de Laplace en el análisis de circuitos?

Así como la Transformada Fasorial nos permite obtener la respuesta en estado estacionario a través de cierta manipulación algebraica (sin tener que trabajar con las ecuaciones integro-diferenciales), la Transformada de Laplace nos permitirá obtener la respuesta completa (transitorio + permanente) del circuito.

Componentes en la respuesta en un circuito:

1) Libre o natural (depende del circuito)

2) Forzada (depende de la excitación)

1) + 2) = respuesta transitoria

En general la componente **1** se extingue luego de un determinado tiempo, quedando sólo la componente **2** pasando del régimen transitorio al régimen permanente.
En teoría de los circuitos I se estudió el régimen senoidal permanente ó sea, circuitos excitados con señales senoidales de los cuales sólo se analizaba el régimen permanente de la respuesta.
Por medio de la transformación de Laplace podemos estudiar el comportamiento de circuitos excitados con cualquier tipo de señal periódica o aperióica y analizando tanto la componente libre como la forzada de la respuesta.

La Transformada de Laplace es una herramienta muy poderosa para la resolución de circuitos RCL. La ecuación integro-diferencial que tenemos en el dominio del tiempo, mediante la Transformada de Laplace, podemos convertirla al dominio de la frecuencia compleja de Laplace. Efectuando luego, las respectivas operaciones algebraicas y aplicando finalmente la Transformada Inversa de Laplace obtenemos la respuesta en el domino del tiempo.

2. Propiedades y pares de transformadas

Para un $t \geq 0$ la Transformada de Laplace se define como:

L[f(t)]=F(s), donde:

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t).e^{-st}.dt$$

Esta transformada integral tiene una serie de propiedades que la hacen útil en el análisis de sistemas lineales. Una de las ventajas más significativas radica en que la integración y derivación se convierten en multiplicación y división.
Esto transforma las ecuaciones diferenciales e integrales en ecuaciones polinómicas, mucho más fáciles de resolver.

Asimismo, se define la transformada inversa de Laplace como L^{-1} [F(s)] = f(t)
Al conjunto f(t) y F(s) se lo conoce como pareja o par de la transformada de Laplace.

Propiedades:

Propiedad	f(t)	F(s)
Linealidad	$a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)$	$a \cdot F_1(s) + b \cdot F_2(s)$
Multiplicación de tiempo-frecuencia	$f(a \cdot t)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$
Desplazamiento de tiempo	$f(t \pm t_0)$	$e^{\pm s \cdot t_0} F(s)$
Desplazamiento de frecuencia	$e^{\mp s_0 t} f(t)$	$F(s \pm s_0)$
Diferenciación	$\frac{df(t)}{dt}$	$s \cdot F(s) - f(0^-)$
Diferenciación enésima	$\frac{d^{(n)} f(t)}{dt^n}$	$s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0^-)$ $- s^{n-2} \cdot f'(0^-) - \ldots$ $\ldots - s \cdot f^{(n-2)}(0^-) - f^{(n-1)}(0^-)$
Integración	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
Multiplicación por t	$t\, f(t)$	$-\frac{d(Fs)}{ds}$
Multiplicación por t^n	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

Pares de transformadas:

Los libros de textos traen distintas tablas de pares de transformadas que evitan tener que realizar tediosos cálculos. Por ejemplo:

f(t)	F(s)
Impulso unitario ***δ(t)***	1
Escalón unitario ***μ(t)***	$\frac{1}{s}$
t . μ(t) = ρ(t)	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ ***. μ(t)***	$\frac{1}{s^n}$
$e^{-a \cdot t}$ ***. μ(t)***	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{1}{\lvert a-b \rvert}(e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t})$ ***. μ(t)***	$\frac{1}{(s+a).(s+b)}$
$\frac{e^{-a \cdot t}}{(b-a)(a-c)}, \frac{e^{-b \cdot t}}{(a-b)(c-b)}, \frac{e^{-c \cdot t}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(s+a).(s+b).(s+c)}$
$\cos(\omega t + \theta)$ ***. μ(t)***	$\frac{s.\cos\theta - \omega.\mathrm{sen}\,\theta}{s^2 + \omega^2}$
$\mathrm{sen}(\omega t + \theta)$ ***. μ(t)***	$\frac{s.\mathrm{sen}\,\theta + \omega.\cos\theta}{s^2 + \omega^2}$

3. Transformadas Laplace de algunas funciones elementales

Hallar la transformada de Laplace de la siguiente función de t por medio del uso de tabla:

$$f(t) = [3\,e^{-4t} + 1/2 \cos 5t + 3/4\, t^3 + 8] \,.\, \mu(t)$$

Aplicando transformada de Laplace en ambos miembros:

$$L\{ f(t) \} = L\{ [3\,e^{-4t} + 1/2 \cos 5t + 3/4\, t^3 + 8] \,.\, \mu(t) \} \qquad \textbf{(1)}$$

Ya que la transformada de Laplace de una suma es igual a la suma de las transformadas de Laplace de cada término, (1) se puede expresar como:

$$L\{ f(t) \} = L\{ 3\,e^{-4t} \,.\, \mu(t) \} + L\{ 1/2 \cos 5t \,.\, \mu(t) \} + L\{ 3/4\, t^3 \,.\, \mu(t) \} + L\{ 8 \,.\, \mu(t) \} \qquad \textbf{(2)}$$

Ahora sólo queda reemplazar cada término de (2) por su correspondiente transformada expresada en la tabla, y aplicar las propiedades:

$$L\{ f(t) \} = F(s) = 3/(s+4) + 1/2\, s/(s^2 + 25) + 3/4(3!/s^4) + 8/s$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\mathbf{F(s) = 3/(s+4) + s/[2(s^2 + 25)] + (9/2).s^{-4} + 8/s}}$$

4. Transformada Inversa de Laplace

La aplicación de la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales (o de sistemas cuyas respuestas se expresen mediante ecuaciones diferenciales) se completa cuando luego de obtenida la respuesta en el dominio de la variable s, se obtiene la respuesta en el domino del tiempo. Esto es posible gracias a la propiedad de unicidad que tiene esta transformación, la cual nos asegura que existe una única función en el tiempo cuya transformada coincide con nuestra respuesta en el dominio de s.
La operación que lleva F(s) a f(t) se llama antitransformada o transformada inversa de Laplace y se define como:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2j\pi} \int_{-j\omega}^{j\omega} F(s)\, e^{st}\, \mathrm{d}s$$

Pero como esta integral es en general de difícil resolución, la transformada inversa de una función F(s) se encuentra siempre buscando una función f(t) candidata, cuya transformada sea F(s). Para facilitar la búsqueda de esa función f(t) se puede descomponer la función original F(s) en una suma de funciones más sencillas y luego aplicar la propiedad de linealidad. Es decir:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

$$f1(t) + f2(t) + f3(t) = L^{-1}[F1(s) + F2(s) + F3(s)]$$

Donde:

$$F(s) = F1(s) + F2(s) + F3(s) \text{ y } f(t) = f1(t) + f2(t) + f3(t)$$

Estas funciones sencillas $F_1(s)$, $F_2(s)$, $F_3(s)$ deben ser además, transformadas conocidas de modo tal que puedan asociarse fácilmente a sus funciones primitivas en el tiempo.
Existen varios métodos para determinar la antitransformada de Laplace. A continuación se explicará el ***Método de las Fracciones Parciales***.

Desarrollo en fracciones parciales

Una función en el dominio de la variable s satisface:

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

Si se escribe como F(s) = P(s)/Q(s), entonces se puede asegurar que el grado de P(s) es siempre menor al de Q(s).
El método de expansión de fracciones simples permite expandir un cociente de polinomios en una suma de fracciones con una constante a determinar como numerador y una raíz del polinomio Q(s) como denominador. Las fracciones simples propuestas dependen del tipo de raíces de Q(s).

Raíces simples

Sea $Q(s) = (s + \alpha_1)(s + \alpha_2) \cdot \cdot \cdot (s + \alpha_n)$ entonces F(s) puede escribirse:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{(s+\alpha_1)} + \frac{A_2}{(s+\alpha_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(s+\alpha_n)}$$

Para encontrar las constantes se multiplica ambos miembros por la raíz denominador y se toma límite para s que tiende a dicha raíz. Por ejemplo

$$\lim_{s\to-\alpha_1}\left[(s+\alpha_1)\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \lim_{s\to-\alpha_1}\left[A_1 + (s+\alpha_1)\frac{A_2}{(s+\alpha_2})) + \cdots + (s+\alpha_1)\frac{A_n}{(s+\alpha_n)}\right]$$

$$\lim_{s\to-\alpha_1}\left[(s+\alpha_1)\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = A_1$$

En general, cualquier constante i-ésima puede ser calculada:

$$A_i = \lim_{s\to-\alpha_i}\left[(s+\alpha_i)\frac{P(s)}{Q(s)}\right]$$

Raíces múltiples

Sea $Q(s) = (s + \alpha)^n$, entonces F(s) puede escribirse:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{(s+\alpha)} + \frac{A_2}{(s+\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(s+\alpha)^n}$$

Para encontrar la constante A_n, se multiplican ambos miembros por el denominador de F(s) y se toma límite para $s \to -\alpha$

$$\lim_{s\to-\alpha}\left[(s+\alpha)^n\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \lim_{s\to-\alpha}\left[A_1(s+\alpha)^{n-1} + A_2(s+\alpha)^{n-2} + \cdots + A_{n-1}(s+\alpha) + A_n\right]$$

$$\lim_{s\to-\alpha}\left[(s+\alpha)^n\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = A_n$$

Ahora para hallar A_{n-1} se toma la derivada respecto a s de $(s + \alpha)^n$ P(s)/Q(s) y luego nuevamente límite para $s \to -\alpha$

$$\lim_{s \to -\alpha} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left((s+\alpha)^n \frac{P(s)}{Q(s)} \right) \right] = \lim_{s \to -\alpha} \left[A_1 (s+\alpha)^{n-2} + A_2 (s+\alpha)^{n-3} + \cdots + A_{n-1} \right]$$

$$\lim_{s \to -\alpha} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left((s+\alpha)^n \frac{P(s)}{Q(s)} \right) \right] = A_{n-1}$$

En general, para encontrar la constante A_{n-j} se toma el límite de la derivada j -ésima de $(s + \alpha)^n$ P(s)/Q(s)

$$A_{n-j} = \lim_{s \to -\alpha} \left[\frac{\mathrm{d}^{(j)}}{\mathrm{d}s} \left((s+\alpha)^n \frac{P(s)}{Q(s)} \right) \right]$$

Ejemplo:

Hallar $L^{-1}\{(3s + 7) / (s^2 - 2s - 3)\}$

Como se ve, es de la forma $L^{-1}\{P(s)/ Q(s)\}$, donde P(s) = 3s + 7 y $Q(s) = s^2 - 2s - 3$; se puede observar también que el grado de Q(s) > P(s).

El polinomio Q(s) se puede expresar como $s^2 - 2s - 3 = (s+1)(s-3)$. Entonces:

$$\frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3} = \frac{3s + 7}{(s - 3)(s + 1)} = \frac{A}{s - 3} + \frac{B}{s + 1} \qquad \textbf{(1)}$$

Multiplicando por (s - 3)(s + 1) se obtiene:

$$3s + 7 = A\,(s + 1) + B\,(s - 3) = (A + B)s + A - 3B \qquad \textbf{(2)}$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de s a ambos lados de la ecuación resultante (2), hallamos los valores de los coeficientes A y B:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ A - 3B = 7 \end{cases}$$

Calculando, resulta A = 4 y B = -1. Reemplazando en (1):

$$\frac{3s + 7}{(s - 3)(s + 1)} = \frac{A}{s - 3} + \frac{B}{s + 1} = \frac{4}{s - 3} - \frac{1}{s + 1} \qquad \textbf{(3)}$$

Para hallar la Antitransformada de Laplace, se busca en la Tabla de Transformadas de Laplace y se reemplazan los términos:

$$L^{-1}\left[\frac{3s+7}{(s-3).(s+1)}\right] = L^{-1}\left[\frac{4}{s-3}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = 4.L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

Por tabla:

$$\boxed{\mathbf{f\,(t) = (4\,e^{3t} - e^{-t}).\mu(t)}}$$

5. ¿Cómo se modelan los elementos en el dominio "s"?

Resistor:

En el dominio del tiempo v(t) = R i(t), o simplificando la nomenclatura:

$$v = R\,i$$

La transformada de Laplace implica **V(s)**=R **I(s)**, o simplificando la nomenclatura:

$$V = R\,I$$

Capacitor:

En el dominio temporal:

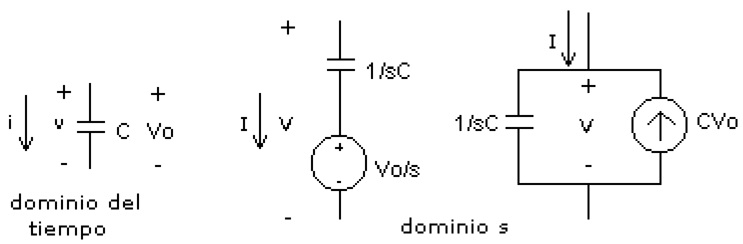
$$i = C.\,dv/dt$$

Al aplicar la transformada, la ecuación se convierte en:

$$I(s) = C\,.[sV(s) - v(0^-)] = sC.V(s) - C.V_0 \qquad (V_0 = V_{C0})$$

Si despejamos V(s):

$V(s) = (1/sC)\, I(s) + V_0/s$ (Se define $1/sC = X_C(s)$ como: **reactancia capacitiva**)



Inductor:

En el dominio temporal:

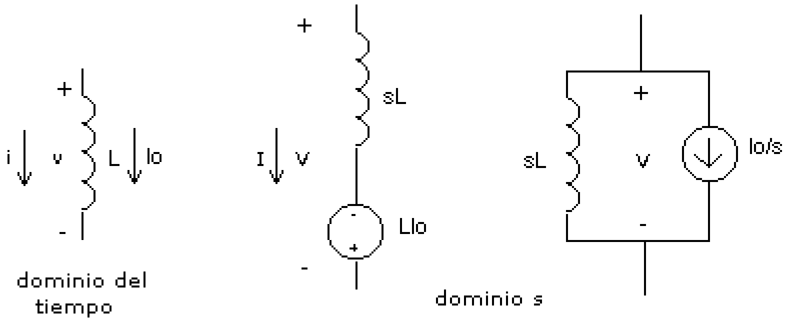
$$v = L\,.di/dt$$

Al aplicar la transformada, la ecuación se convierte en:

$$V(s) = L\,[sI(s) - i(0^-)] = sL.I(s) - L.I_0 \qquad (I_0 = I_{L0})$$

Si despejamos I(s):

$$I(s) = V(s)/sL + I_0/s \qquad \text{(Se define } sL = X_L(s) \text{ como: } \textbf{reactancia inductiva}\text{)}$$

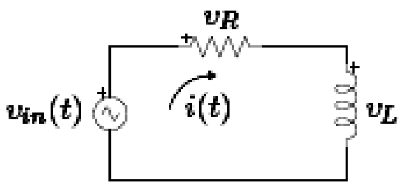


6. ¿Cómo se resuelven los circuitos en el dominio "s"?

Luego de transformar el circuito al dominio s, se procede como de costumbre porque la Ley de Ohm y las Leyes de Kirchhoff siguen siendo válidas en dicho dominio.

Aplicación de Laplace a la resolución de circuitos

Un circuito eléctrico con elementos que almacenan energía, tiene como respuesta una ecuación diferencial. El orden de esta ec. dif. depende de cuantos elementos inductivos o capacitivos irreductibles tenga el circuito. Por medio de la transformada de Laplace vamos a obtener una ecuación algebraica en s que representa la ec. dif. en el dominio de la frecuencia.
La resolución del circuito consiste por ahora en encontrar la función respuesta en el domino de la frecuencia (más adelante veremos cómo encontrar la función respuesta en el dominio del tiempo a partir de su función transformada).
Supongamos un circuito RL como el de la siguiente figura, excitado con una fuente $v_{in}(t)$ que tiene una corriente inicial $i(0) = I_0$. Se desea encontrar la función respuesta I(s) = L[i(t)].



Aplicando la Ley de Kirchhoff de las tensiones (LKV) y según los signos de las tensiones tenemos:

$$v_{in}(t) - v_R(t) - v_L(t) = 0$$

De donde la ec. dif. expresada en función de la respuesta será:

$$v_{in}(t) = R\,i(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

Para resolverla, transformemos esta ecuación aplicando L[ ] a ambos miembros:

$$\mathcal{L}\left[v_{in}(t)\right] = \mathcal{L}\left[R\,i(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right]$$

Resolviendo por separado cada una de estas transformadas se obtiene:

$$\mathcal{L}\left[v_{in}(t)\right] = V_{in}(s)$$
$$\mathcal{L}\left[R\,i(t)\right] = R\,I(s)$$
$$\mathcal{L}\left[L\,\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right] = L\,\left(sI(s) - i(0)\right)$$

Entonces, la ec. dif. se transforma en la siguiente ecuación algebraica dependiente de la variable s:

$$Vin(s) = RI(s) + sLI(s) - Li(0)$$

Reordenando términos y reemplazando el valor inicial de la corriente en el inductor [i(0) = I_0], despejamos I(s):

$$RI(s) + sLI(s) = V_{in}(s) + LI_0$$

$$I(s) = \frac{V_{in}(s) + LI_0}{R + sL}$$

Que es la solución buscada.
Si bien lo que tenemos hasta ahora es la transformada de la respuesta i(t), sabemos por la propiedad de unicidad que esta transformada es única y por lo tanto a partir de ella podremos encontrar una y sólo una función i(t) que cumpla con:

$$i(t) = L^{-1}[I(s)]$$

Esta operación se llama transformada inversa ó antitransformada de I(s) y es la que nos lleva desde el dominio de s al dominio de t.

Para el circuito anterior, supongamos que:

$v_{in}(t) = 1V.\mu(t)$
R = 1KΩ
L = 100mH
Io = 10mA

Transformando y abreviando:

$V_{in}(s) = 1/s$
$R = 10^3$
$L = 10^2.10^{-3} = 10^{-1}$
$Io = 10.10^{-3} = 10^{-2}$

Reemplazando en la expresión hallada de I(s):

$$I(s)=\frac{1/s+10^{-1}.10^{-2}}{10^{3}+s.10^{-1}}.\frac{s}{s}=\frac{1+10^{-3}.s}{s.(s.10^{-1}+10^{3})}=\frac{10^{-3}.(s+10^{3})}{s.10^{-1}.(s+10^{4})}=\frac{10^{-2}.(s+10^{3})}{s.(s+10^{4})}$$

Distribuyendo el denominador y simplificando:

$$I(s)=\frac{10^{-2}}{s+10^{4}}+\frac{10}{s.(s+10^{4})}.10^{3}.10^{-3}=\frac{10^{-2}}{s+10^{4}}+10^{-3}.\frac{10^{4}}{s.(s+10^{4})}$$

Finalmente, para retornar al dominio del tiempo, de la tabla de transformadas obtenemos:

$$i(t)=[10^{-2}.e^{-10^{4}t}+10^{-3}.\left(1-e^{-10^{4}t}\right)].\mu(t) \qquad [A]$$

La cual representa a una función exponencial decreciente desde el valor inicial de 10mA a la cual se le suma otra exponencial creciente de 0 a 1mA, ambas con igual constante de tiempo.

7. “Polos” y “Ceros” de una función

Se denomina “cero” (z_i) a cada valor de “s” que hace valer cero a la función. Se llama “polo” (p_i) a cada valor de “s” que hace valer infinito a dicha función. En el caso del ejemplo anterior, para I(s) habría un sólo “cero” en $z = -10^3$ y 2 polos en $p_1 = 0$ y $p_2 = -10^4$. Conocer estos valores, nos permite predecir la forma de onda de la respuesta de un circuito ó, si se trata de una función de transferencia, del tipo de filtro que representa el circuito y sus características.

8. Circuito equivalente de Laplace

Si se toman en consideración las condiciones iniciales y se suponen en general distintas de cero, se puede utilizar la representación de las respuestas de cada elemento para construir lo que se conoce como circuito equivalente de Laplace.
Este circuito equivalente debe permitirnos obtener en forma directa la ecuación de la respuesta en la variable s, sin tener que plantear primero la ec. dif. y luego transformar para poder resolver.
Para encontrar un circuito equivalente serie RLC partimos de la sumatoria de las tensiones en el tiempo y luego transformamos:

$$v_{in}(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$$

$$V_{in}(s) = V_R(s) + V_L(s) + V_C(s)$$

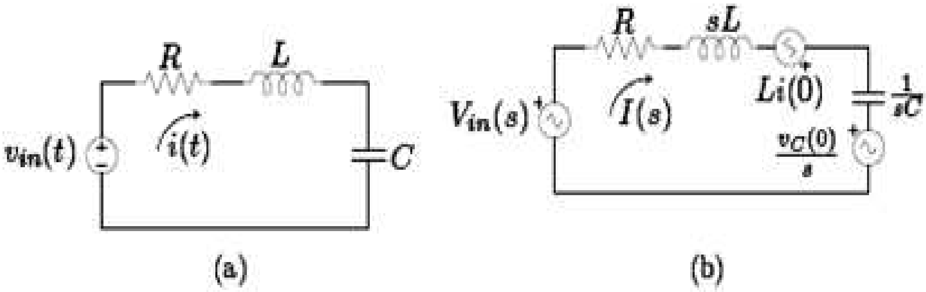
Como ya vimos, las transformadas de las tensiones sobre cada elemento son:

$$V_R(s) = RI(s); \quad V_L(s) = sLI(s) - Li(0); \quad V_C(s) = \frac{1}{sC}\left[I(s) + Cv_C(0)\right]$$

Reemplazando:

$$V_{in}(s) = RI(s) + [sLI(s) - Li(0)] + \left[\frac{1}{sC}I(s) + \frac{v_C(0)}{s}\right]$$

Analizando los diferentes términos del segundo miembro de esta ecuación, vemos que algunos de ellos tienen como factor a I(s). El producto de una corriente por una carga nos da la tensión en bornes del elemento, lo que significa que R, sL y 1/sC son cargas.
Ésto se corresponde con lo visto anteriormente cuando se encontró la función de transferencia de cada elemento.



Circuito RLC serie (a) en el dominio t y (b) su equivalente en el dominio de Laplace

Vemos en el circuito transformado que aparecen las condiciones iniciales, tanto del inductor como del capacitor, las cuales no contienen al factor I(s), y como estamos sumando tensiones, estos términos deben ser tensiones. En el circuito equivalente se los representa con generadores cuyo valor depende de la energía inicial almacenada en cada elemento.
Finalmente, agrupando generadores en un miembro y a los términos con el factor I(s) en el otro, la ecuación de circuito queda:

$$V_{in}(s) + Li(0) - \frac{v_C(0)}{s} = RI(s) + sLI(s) + \frac{1}{sC}I(s)$$
$$V_{in}(s) + Li(0) - \frac{v_C(0)}{s} = \left(R + sL + \frac{1}{sC}\right) I(s)$$
$$V_{in}(s) + Li(0) - \frac{v_C(0)}{s} = Z(s)I(s)$$

Nuevamente, Z(s) es la impedancia de s o impedancia de Laplace, formada por la suma de cada una de las impedancias de s del circuito.

$$Z(s) = \left(R + sL + \frac{1}{sC}\right)$$

El circuito transformado de la fig. anterior, permite obtener en forma directa la ec. transformada, que es lo que se buscaba. Obsérvese cómo la polaridad de los generadores de tensión que representan las condiciones iniciales, determinan el signo en la ecuación.

9. Función de transferencia

En general se define como función de transferencia al cociente entre la transformada de la salida y la transformada de la entrada de un sistema con todas las condiciones iniciales iguales a cero.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Big\rfloor \text{C.I.N. (Condiciones Iniciales Nulas)}$$

Donde:

$$Y(s) = L[y(t)]$$

Que es la transformada de la salida del sistema, y:

$$X(s) = L[x(t)]$$

Es la transformada de la entrada.
En términos de circuitos eléctricos se denomina función de transferencia a la transformada de la respuesta sobre la transformada de la excitación, cuando todos los elementos inductivos y capacitivos del circuito están desenergizados.
Si analizamos por ejemplo el circuito RL serie visto anteriormente, donde definimos la tensión $v_{in}(t)$ como excitación y la corriente i(t) como respuesta, la función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{I(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{R + sL}$$

Podemos cambiar el punto de vista de la entrada y salida de este circuito, pensando al RL como una carga por la que circula una corriente i(t) provocando una caída de tensión en sus bornes $v_{carga} = v_{in}$ como respuesta. En este caso la función de transferencia será el cociente entre la $V_{in}(s)$ (respuesta) y la I(s) (excitación).

$$H(s) = \frac{V_{in}(s)}{I(s)} = R + sL$$

10. Teoremas de los valores inicial y final

El teorema del valor inicial permite conocer el valor de inicio de la respuesta en el dominio del tiempo, estando aún en el dominio de la variable s. Esto es útil a la hora de comprobar si la respuesta encontrada cumple con las condiciones iniciales exigidas por el sistema, sin necesidad de antitransformar para la verificación:

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} (sF(s))$$

Igualmente importante al valor inicial es el valor final que tomará la respuesta en el tiempo. Este valor puede conocerse mediante el teorema del valor final antes de pasar la respuesta al dominio del tiempo:

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} (sF(s))$$

Por ejemplo, para el circuito R-L serie visto anteriormente, la respuesta transformada era:

$$I(s) = \frac{10^{-2}.(s+10^{3})}{s.(s+10^{4})}$$

Valor inicial: $i(0) = 10^{-2}$ A = 10mA

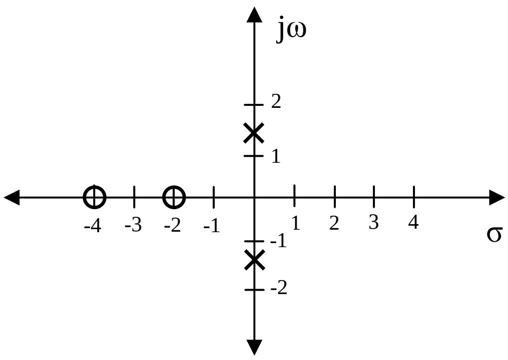
Valor final: $i(\infty) = 10^{-3}$ A = 1mA

11. Diagramas de polos y ceros

Dada a una función de transformación continua en el dominio de Laplace **H(s)**, como ya vimos, un cero es cualquier valor de s para el cual la función de transferencia es cero y un polo es cualquier valor de s para el cual la función de transferencia es infinita.
Al graficar éstos en el plano s= σ + jω, representaremos los ceros con "o" y los polos con "x".

Ejemplo 1:

Encontrar los polos y ceros de la función de transferencia: $H(s) = \frac{s^2+6s+8}{s^2+2}$ y graficar los resultados en el plano s.
Lo primero que tenemos que reconocer es que la función de transferencia será igual a cero cuando el numerador s^2+6s+8, sea igual a cero. Para encontrar los valores de s que cumplen esto, igualamos a cero dicho numerador para luego factorearlo. Aplicando la fórmula para la ecuación cuadrática hallamos sus ceros en s= -2 y s= -4.
Por lo que el numerador factoreado queda: (s+2)(s+4).
Para los polos, la función de transferencia será infinita cuando el denominador es cero. Ésto sucede cuando s^2 +2 es cero. Factoreando la función, nos da $(s+i\sqrt{2})(s-i\sqrt{2})$. Lo que significa que tenemos raíces imaginarias en $i\sqrt{2}\ y\ en - i\sqrt{2}$.
Al graficar estos polos y ceros hallados, obtenemos:



Gráfica de polos y ceros de H(s)

Ya que hemos encontrado y graficado los polos y ceros, tenemos que preguntarnos qué es lo que nos dice esta gráfica. Lo que podemos deducir es que la magnitud de la función de transferencia será mayor cuando la frecuencia compleja s se encuentre cerca de los polos y menor cuando se encuentre cerca de los ceros. Esto nos da un entendimiento cualitativo de lo que el sistema hace en varias frecuencias y es crucial para analizar su estabilidad.

Repeticiones de Polos y Ceros

Es posible obtener más de un polo o cero en el mismo punto. Por ejemplo, la función de transferencia ***H(s)=s²*** tendrá dos ceros en el origen y la función ***H(s)=1/s³*** tendrá 3 polos en el origen.

Respuesta según la ubicación de los polos

Cuando el sistema en estudio está representado por ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas, la función de transferencia resulta ser una razón de polinomios; esto es:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

donde a(s) y b(s) son polinomios en s. Para sistemas físicamente reales, el orden del polinomio denominador a(s) siempre es mayor o igual al orden del numerador b(s).
Denominamos polos de G(s), a aquellos lugares del plano complejo s, en donde la función de transferencia G(s) se hace infinita, o sea donde a(s) = 0 [raíces del polinomio denominador a(s)].
Denominamos ceros de G(s), a aquellos lugares del plano complejo s, en donde la función de transferencia G(s) se hace cero, o sea donde b(s)=0 [raíces del polinomio numerador b(s)].
Los polos y ceros describen completamente a G(s), excepto por un multiplicador constante, esto significa que las funciones G(s) las podemos representar directamente en el plano s.
Ya que la respuesta de un sistema a un impulso está dada por su función de transferencia, a dicha respuesta se la denomina respuesta natural del sistema. Podemos usar los polos y ceros para determinar la respuesta temporal y así identificar la forma de la respuestas temporales con las ubicaciones correspondientes de los polos y ceros de la función de transferencia.
Tomemos por ejemplo la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}$$

Separando en fracciones simples:

$$G(s) = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{3}{(s+2)}$$

Utilizando la tabla de transformadas de Laplace, obtenemos la respuesta natural del sistema del ejemplo:

$$g(t) = \begin{cases} -e^{-t} + 3.e^{-2.t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Del ejemplo, podemos extendernos al caso general de polos en el eje real, observando que la ubicación de los polos dan los coeficientes de las exponenciales, y que los ceros afectan solo en la magnitud de la amplitud de la respuesta.

Para el caso de raíces complejas conjugadas obtenemos una conclusión similar: los polos determinan la forma de la respuesta temporal.
Dada la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+5}$$

Separando en fracciones simples:

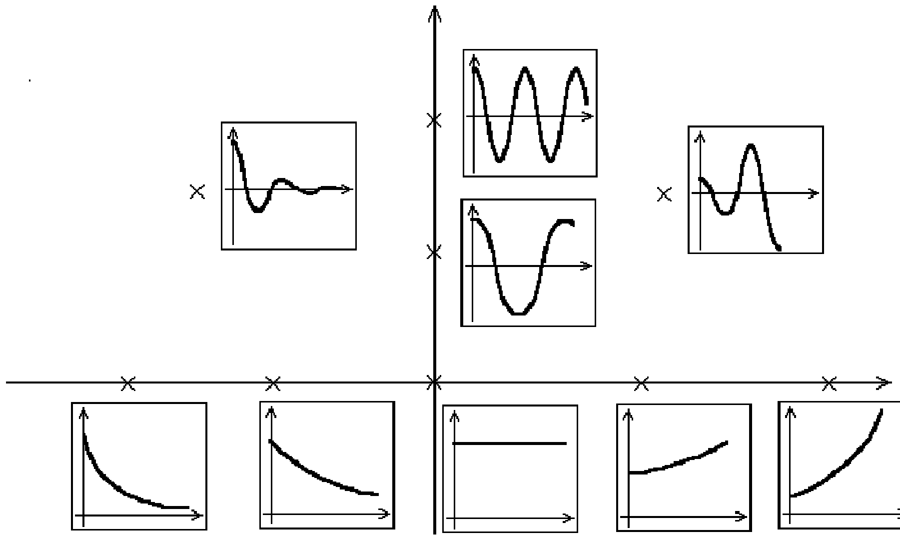
$$G(s) = \frac{(1+4i)/4i}{s+1+2i} + \frac{(1-4i)/-4i}{s+1-2i} = \frac{A}{2}\cdot\frac{e^{-i\theta}}{s+1+2i} + \frac{A}{2}\cdot\frac{e^{i\theta}}{s+1-2i}$$

Utilizando la tabla de transformadas de Laplace:

$$g(t) = \frac{A}{2} \cdot e^{-i\theta} \cdot e^{-t} \cdot e^{-2it} + \frac{A}{2} \cdot e^{i\theta} \cdot e^{-t} \cdot e^{i2t} = A \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t + \theta)$$

Como vemos, la respuesta natural a un par de polos complejos conjugados es una sinusoide amortiguada por una exponencial. Tanto la exponencial, como la frecuencia de la sinusoide dependen sólo de los polos.

En la siguiente figura esquematizamos las respuestas naturales de los sistemas dependiendo de la ubicación de los polos.



Respuestas temporales asociadas con los respectivos polos en el plano s.