TEORÍA DE LOS CIRCUITOS II

SEÑALES APERIÓDICAS

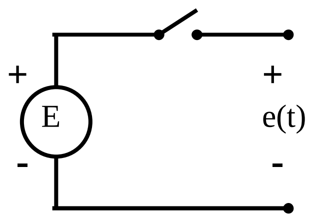
INDICE

SEÑALES APERIÓDICAS ELEMENTALES

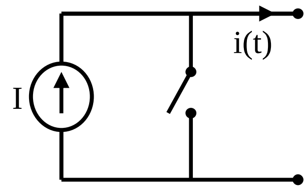
1) Señal escalón:

a) Escalón unitario:

Una fuente de corriente, o de tensión, constante que se conecta de una red puede ser representada por la función escalón.



Escalón de tensión cuando se cierra el interruptor

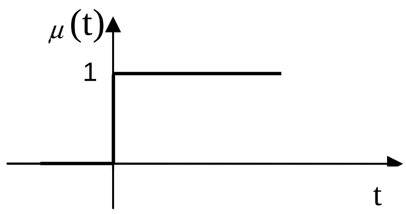


Escalón de corriente cuando se abre el interruptor

Analíticamente, definimos al escalón unitario como:

$$\mu(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

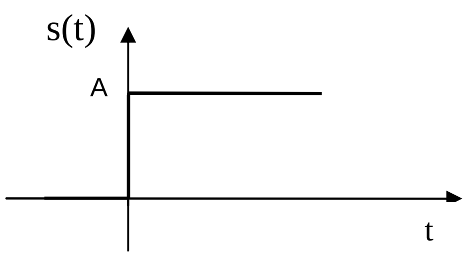
y su gráfica es:



La función es cero para todo valor de tiempo negativo, y uno para todo tiempo positivo. La operación de cambio (cierre en el ejemplo de tensión, apertura en el de corriente) ocurre en el corto intervalo entre 0^-, donde la función es cero, y 0^+, cuando la función es igual a uno. En el instante t = 0 está indeterminada.

b) Escalón de amplitud A:

$s(t) = A \cdot \mu(t)$



Para el ejemplo del generador de tensión, la fuente quedará aplicada cuando se cierre la llave, la tensión de salida pasará de cero al valor de E voltios. Analíticamente podemos expresarla como:

$$e(t) = E.\mu(t)$$

La función $\mu(t)$ multiplica a E por cero para todo t<0 y por uno para todo t>0. El resultado es simplemente cortar la tensión para valores negativos de t.

En forma análoga podemos representar la apertura de la llave en el circuito del generador de corriente:

$$i(t) = I.\ \mu(t)$$

Esta función escalón es la más fácilmente entendible ya que representa la acción de operar una llave para conectar, o desconectar un circuito. Sin embargo debemos tener en cuenta que los circuitos procesan las señales de excitación pudiendo dar como respuesta una señal proporcional a esa excitación pero también a su integral o a su derivada. Consecuentemente debemos pensar en los resultados que esa señal escalón puede producir en un circuito.

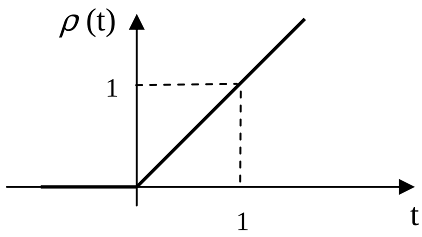
2) Señal rampa:

a) Rampa unitaria:

Se define como:

$$\rho(t)=\begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t & t \ge 0 \end{cases}$$

y su gráfica es:



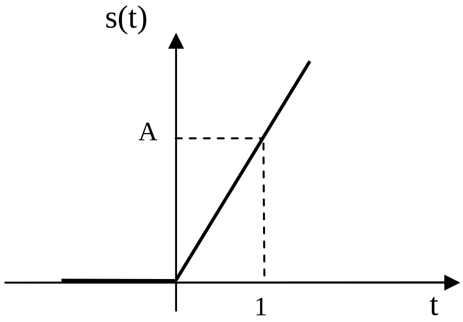
También, podemos definirla como:

$$\rho\ (t) = t.\ \mu\ (t)$$

Esta función tiene una pendiente unitaria porque proviene de un escalón de amplitud unitaria. Si el escalón no es unitario, digamos igual a A, la pendiente de la rampa será también A.

b) Rampa de pendiente A:

$$s(t) = A\ .\ \rho\ (t)$$



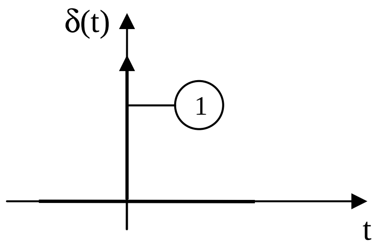
3) Señal impulso:

a) Impulso unitario:

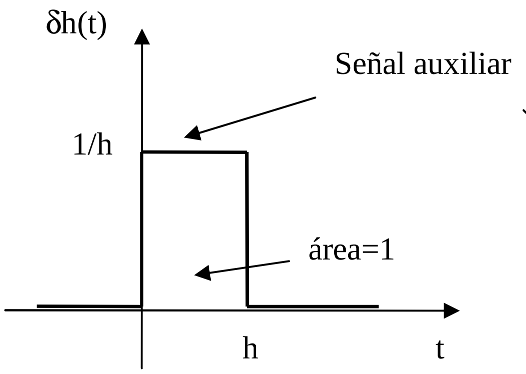
Podría definirse como:

$$\delta(t)=\begin{cases} 0 & \forall \quad t\neq 0 \\ \neq 0 & \forall \quad t=0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t).dt=1 & \textbf{(área = 1)} \end{cases}$$

y su gráfica es:



Pero su definición más correcta sería la siguiente:



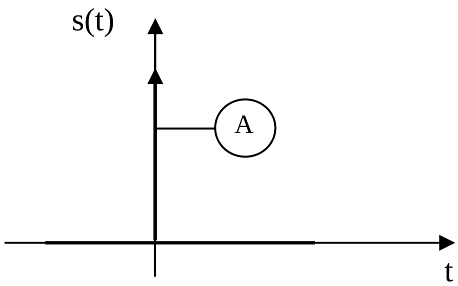
$$\delta h(t)=\begin{cases} 0 & \forall \quad h<t<0 \\ \frac{1}{h} & \forall \quad 0<t<h \end{cases}$$

Luego:

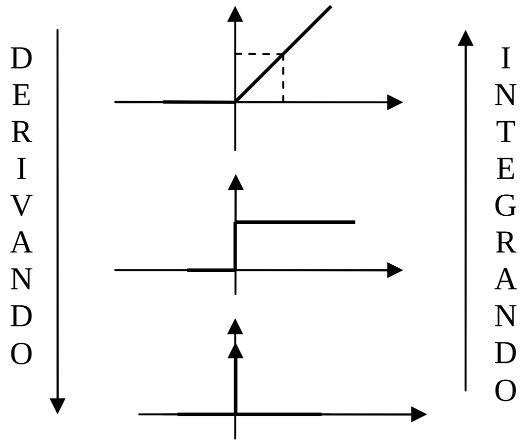
$$\delta(t)=\lim_{h\to 0}\delta h(t)$$

b) Impulso de fuerza A o área A:

s(t) = A . δ(t)



Relación entre las señales aperiódicas elementales:

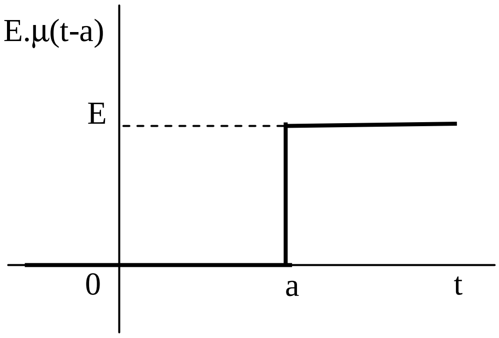


REPRESENTACIÓN DE OTRAS SEÑALES APERIÓDICAS A PARTIR DE LAS SEÑALES ELEMENTALES

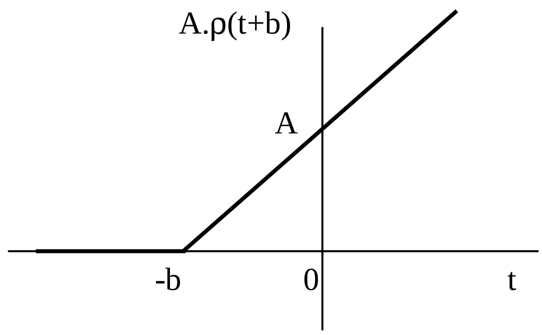
La función escalón tiene su aplicación en el instante t=0. Si queremos que ocurra en otro momento debemos modificar el argumento de la variable de forma que éste sea nulo en el instante deseado. Si cambiamos el argumento de t a t-a obtenemos la función escalón unitaria:

$$f(t) = \mu(t-a)$$

Cuyo argumento se hace cero en t = a, y en consecuencia el escalón se iniciará en ese instante. Si por otra parte cambiamos t por t+b resulta en la función: $\mu(t+b)$ cuyo argumento se hace cero en t = -b dando lugar a un escalón que se inicia en ese momento.
Vemos entonces que podemos desplazar la función en el tiempo retrasándola con el agregado de un valor negativo al argumento o adelantándola con un valor positivo.
Lo mismo tiene aplicación para el resto de las funciones aperiódicas.



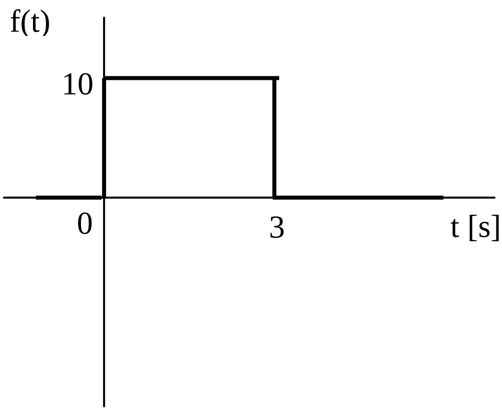
Escalón atrasado en t = a



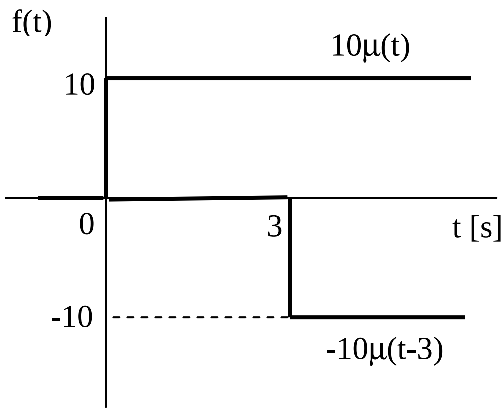
Rampa adelantada en t = -b

Una de las aplicaciones más útiles de la función escalón unitario es la de seccionar o recortar funciones ya que la multiplicación de cualquier función del tiempo por ella hace que el resultado sea cero para cualquier instante en el cual el argumento sea negativo. Es decir que se usa para indicar en qué momento se inicia o conecta la función utilizada. Por otra parte el análisis de las redes se hace a partir de un determinado momento, llamado tiempo cero, y las soluciones son

válidas sólo a partir de ese instante. Una forma de indicar la no validez de una respuesta para valores anteriores es multiplicarla por el escalón unitario. Por ejemplo la función f(t)=seno(t) tiene validez para todo tiempo de menos infinito a más infinito; pero la función g(t)=sen(t).µ(t) tiene valor a partir de t=0 siendo nula para todo valor negativo. Se dice que la función ha sido seccionada al origen.
Con los conocimientos recientemente vistos podemos construir funciones de diversas características sumando funciones aperiódicas distintas desplazándolas en el tiempo en forma adecuada.
Por ejemplo: queremos representar un pulso rectangular de amplitud 10 voltios y duración 3 segundos a partir del instante t=0, como el de la figura:



El pulso

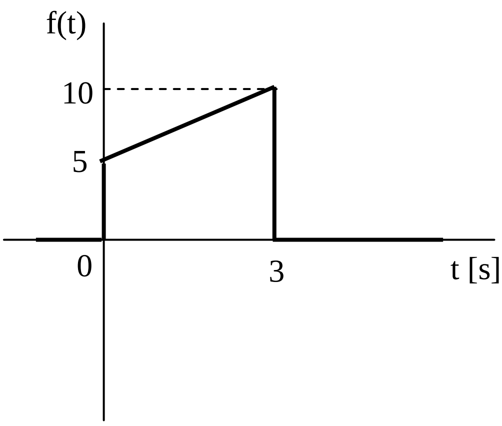


La combinación de escalones

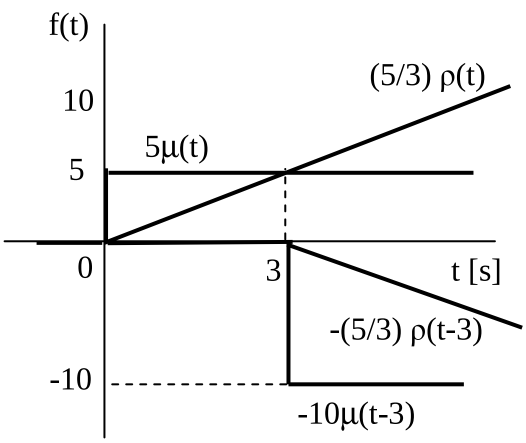
Si aplicamos un escalón de amplitud 10 en t=0 obtenemos la iniciación de la onda; como el escalón continúa en forma constante hasta t=∞, pero el pulso no, tendremos que cancelarlo en t=3 con otra función escalón de forma que al sumarla a la otra resulte en el valor cero, es decir que el escalón deberá tener una amplitud igual a -10. Finalmente tendremos que analíticamente el pulso quedará definido como:

$$f(t) = 10\mu(t) - 10\mu(t-3)$$

Otro caso:



La función



La composición

Para lograr la forma de onda deseada partimos con un escalón de amplitud igual a 5 más una rampa de pendiente 5/3 en el origen. Sumando ambas llegamos al valor de 10 en el instante t=3. Para volver al valor cero aplicamos en t=3 un escalón de amplitud igual a -10. Pero la función rampa inicial sigue existiendo y debemos cancelarla con otra de igual pendiente pero negativa. Así obtenemos que podemos representar analíticamente la función original como:

$$f(t) = 5.\mu(t) + (5/3).\rho(t) - (5/3).\rho(t-3) - 10.\mu(t-3)$$

Representación de formas de onda arbitrarias por trenes de funciones escalón

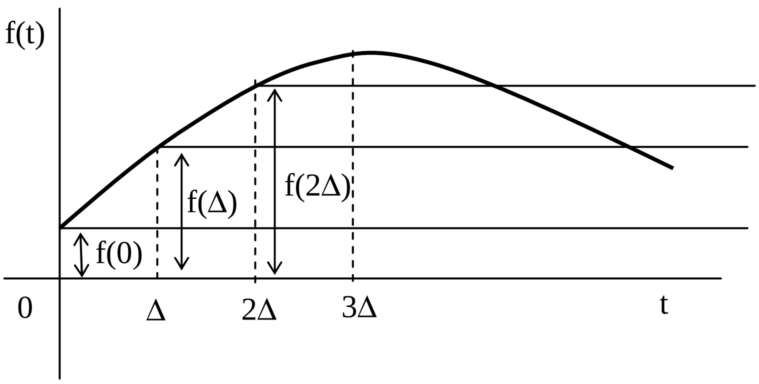
Se denomina tren de funciones escalón a una serie de funciones escalón con amplitudes variables y retardos que aumentan progresivamente. Por medio de un tren de este tipo es posible obtener una expresión aproximada de una forma de onda arbitraria.
La figura muestra una forma de onda cualquiera que representaremos por un tren de escalones con un espaciado Δ entre ellos. El escalón inicial ocurre en t=0 y tiene una altura f(0). Su expresión matemática es:

$$f_1(t) = f(0)\ \mu(t)$$

En t=Δ se agrega otro escalón para que la onda representada coincida numéricamente con la original, para ello la altura de este escalón es la diferencia entre el valor de la función en t=Δ y el valor del primer escalón o sea f(0). Este escalón resulta entonces:

$$f_2(t) = [f(\Delta) - f(0)]\ \mu(t-\Delta) =$$
$$= \Delta.\frac{[f(\Delta) - f(0)]}{\Delta}\ \mu(t-\Delta) =$$
$$= \Delta f'(\Delta)\ \mu(t-\Delta)$$

Donde f'(Δ) es la derivada de la función dada, evaluada en t=Δ, cuando $\Delta \rightarrow 0$.



Puede verse que un tercer escalón agregado en t=2Δ tendrá el valor:

$$f_3(t) = \Delta f'(2\Delta)\ \mu(t-2\Delta)$$

Consecuentemente podemos escribir una expresión matemática para la forma de onda dada:

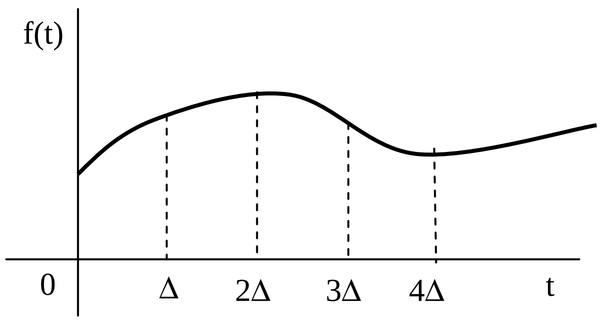
$$f(t)= f(0)\ \mu(t) + \Delta\ [f'(\Delta)\ \mu(t-\Delta) + f'(2\Delta)\ \mu(t-2\Delta) + \dots]$$

Si concordamos en que la expresión dada no es lo suficientemente aproximada podemos reducir el intervalo Δ hasta que el resultado sea aceptable. En el límite, cuando Δ tiende a cero, la expresión toma la forma de una integral.
Si queremos resumir el procedimiento podemos decir que el primer escalón es el valor inicial de la función y los subsiguientes tienen la altura necesaria para llegar al valor de la función en el intervalo considerado partiendo el valor de amplitud logrado en el intervalo anterior. Es decir que los escalones tienen la altura diferencia entre el valor anterior y el actual, lo que implica que pueden ser positivos o negativos.
En el ejemplo desarrollado se ha tomado como valor para el intervalo, el valor inicial del mismo. Esto da un error en defecto cuando la función es creciente y por exceso cuando es decreciente. En algunos casos esto puede mejorarse tomando el valor final del intervalo o el valor medio del mismo. También es posible ubicar los escalones en cualquiera de los tres instantes, inicial, medio o final, independientemente de la consideración anterior. Cada caso en particular deberá evaluarse para tomar la decisión más correcta en este aspecto.

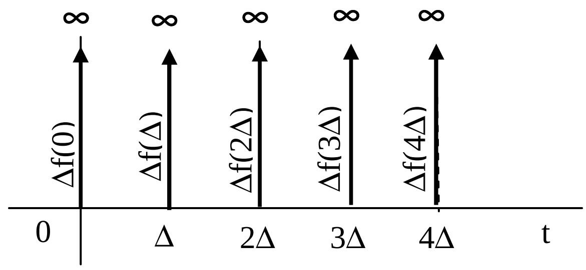
Representación de formas de onda arbitrarias por trenes de funciones impulso

La representación de una onda por medio de un tren de impulsos es más fácil que por un tren de escalones. Debe recordarse que un impulso es simplemente un pulso corto con una amplitud relativamente alta con respecto a su ancho y que su forma realmente no importa siendo significativa solamente su área.
Una función arbitraria podrá ser resuelta por un tren de impulsos si la dividimos primero en secciones las que pueden tener un ancho Δ uniforme, o no. Nosotros tomaremos para el ejemplo el caso de ancho uniforme.
El área de la primera sección es, aproximadamente, Δ.f(0) y puede ser representada por un impulso que ocurre en algún punto del intervalo t=0 a t=Δ. Por conveniencia, asumimos que lo ubicamos en el inicio del intervalo. Este impulso que representa la primer área es:

$$f_1(t) = \Delta.f(0).\ \delta(t)$$



La función original



La aproximación por impulsos

El segundo impulso representando el área correspondiente será:

$$f_2(t) = \Delta . f(\Delta) . \delta(t-\Delta)$$

Y así sucesivamente, en forma similar para los demás. Finalmente obtendremos la representación matemática de la onda dada como:

$$f(t) = \Delta . [f(0) . \delta(t) + f(\Delta) . \delta(t-\Delta) + f(2\Delta) . \delta(t-2\Delta) + ...]$$

Las consideraciones hechas en cuanto a establecer los intervalos y la ubicación de los escalones son también válidas para el tren de impulsos. Si Δ tiende a cero tendremos una representación exacta de la señal considerada.
Aquí tenemos que recalcar que la aproximación es en función de áreas, no de amplitudes; por consiguiente no tendremos una aproximación visual de la forma de onda, sí en el contenido energético.

RESPUESTA DE LOS CIRCUITOS EXCITADOS POR SEÑALES APERIÓDICAS

El desarrollo de funciones arbitrarias por otras mejor definidas matemáticamente nos permite la evaluación de la respuesta de las redes con excitaciones de cualquier tipo o forma. En particular la respuesta a la función impulsiva será usada para caracterizar la red, conocida ésta será fácil obtener la respuesta a una función cualquiera si, previamente, la descomponemos en un tren de impulsos. Si el circuito es lineal la respuesta total será la suma de todas las respuestas obtenidas para los impulsos representantes de todas las áreas de la función original. Lo mismo es válido si conocemos la respuesta al escalón o a cualesquiera otra función (en realidad: sea aperiódica o no).
Hemos dicho que la representación de una función por un tren de escalones o impulsos es aproximada, y esta aproximación depende del intervalo elegido. Resulta bastante obvio que la respuesta que obtengamos será también aproximada. La forma práctica de determinar cuando hemos obtenido un error aceptable es realizar la operación dos veces, usando intervalos más pequeños en la segunda vez, y evaluar la magnitud del cambio en la respuesta, si este cambio está dentro del error admisible llegamos a la aproximación aceptable.