TEORÍA DE LOS CIRCUITOS II

SERIES DE FOURIER

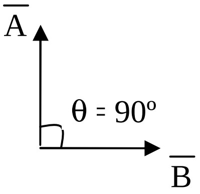
INDICE

Introducción:

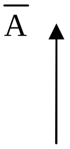
Fourier demostró que se puede expresar cualquier función f(t) como suma de otras funciones gi(t), siempre que éstas sean mutuamente ortogonales entre sí, en un intervalo de 2π rad ó T.
Para que dos funciones sean ortogonales deben verificar que:

$$\int_{to}^{to+T} gm(t)\,.gn(t)\;dt = \begin{cases} 0 & si \quad m \neq n \\ K & si \quad m = n \end{cases}$$

Tal como ocurre con vectores ortogonales:



$$\overline{\text{A}}\;.\;\overline{\text{B}} \;=\; \text{A . B . cos}\,\theta \;=\; 0$$



$$\overline{\text{A}}\;.\;\overline{\text{A}} \;=\; \text{A}^2 \;=\; \text{cte}$$

Entonces, la serie (suma de funciones) sería:

$f(t) \;=\; C_1 \,.\, g_1\,(t) + C2 \,.\, g2\,(t) + \_\,\_\,\_\,\_ + Ci \,.\, g1\,(t) + \_\,\_\,\_\,\_ +$

ó $f(t) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} Ci\,.gi\,(t)$ $\Longrightarrow$ Representación de f (t) según la **Serie generalizada de Fourier**

Siendo:

$$Ci \;=\; \frac{\displaystyle\int_{to}^{to+\frac{2\pi}{Wo}} f\,(t)\,.gi\;(t)\;dt}{\underbrace{\displaystyle\int_{to}^{to+\frac{2\pi}{Wo}} gi^{\,2}(t)\;dt}_{Ki}}$$

$$Ci \;=\; \frac{\displaystyle\int_{to}^{to+\frac{2\pi}{Wo}} f\,(t)\,.gi\;(t)\;dt}{Ki}$$

Para que el error sea mín.:

$$\text{error} = \text{f(t)} - \sum_{i=1}^{n} Ci\,.gi\,(t)$$

Un ejemplo de funciones ortogonales lo constituye el siguiente conjunto:

{sen w_0t, sen 2w_0t, sen 3w_0t, ... sen nw_0t}

Pero este no es un conjunto completo ya que las funciones cos nw_0t, también son ortogonales a las anteriores.
Se puede demostrar que todas las funciones sen nw_0t y cos nw_0t (con n = 0,1,2,_ _ _ , ∞), forman un conjunto ortogonal completo.

Por lo que la serie será:

$$f(t) = A_0 + A_1 \,.\, \cos w_o t + A_2 \,.\, \cos 2w_o t \;+\; \ldots\ldots\ldots + An \,.\, \cos nw_o t \;+$$
$$+\, B_1 \,.\, \text{sen } w_o t + B_2 \,.\, \text{sen } 2w_o t \;+\; \ldots\ldots\ldots + Bn \,.\, \text{sen } nw_o t$$

ó $f(t) = Ao + \sum_{n=1}^{\infty} (An.\cos nwot + Bn.\,sennwot)$ para $to < t < to + T$

Esta expresión representa a la **Serie trigonométrica de Fourier de f(t)**

Siendo:

$$An = \frac{\int_{to}^{to+T} f(t)\,.\cos\, nwot\; dt}{\int_{to}^{to+T} \cos^2 nwot\; dt} \qquad \text{y} \qquad Bn = \frac{\int_{to}^{to+T} f(t)\,.sen\,n\,wot\; dt}{\int_{to}^{to+T} sen^2 nwot\; dt}$$

Si n = 0:

$$Ao = \frac{1}{T}\int_{to}^{to+T} f(t)\,.dt \quad \Longrightarrow \quad \text{Valor medio o componente continua de la señal}$$

Además:

$$\int_{to}^{to+T} \cos^2 nwot\, dt = \int_{to}^{to+T} sen^2 nwot\, dt = \frac{T}{2}$$

$$\therefore \begin{cases} An = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{to}^{to+T} f(t)\,.\cos n\,wot\; dt = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\theta o}^{\theta_0+2\pi} f(t)\,.\cos n\,wot\; dwt \\ Bn = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{to}^{to+T} f(t)\,.\,sen\,nwot\; dt = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} f(t)\,.\,sen\,nwot.dwt \end{cases}$$

También se puede demostrar que el conjunto de funciones: e^{jnWot} (con n = - ∞ , ….., -2, -1, 0, 1, 2, ……, ∞), es ortogonal y completo en un período. Por lo tanto podemos representar a f(t) mediante:

$$f(t) = Fo + F1.e^{JW_0 t} + F2.e^{J2W_0 t} + \ldots\ldots.. + Fn.e^{JnW_0 t} + F_{-1}.e^{-JW_0 t} + F_{-2}.e^{-J2W_0 t} + \ldots..$$

ó $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Fn.e^{JnW_0 t}$ para el intervalo: $t_0 < t < t_0 + T$

Y si f(t) es periódica, para todo el intervalo: $-\infty < t < \infty$

Esta función representa a la **Serie exponencial de Fourier**

Siendo: $Fn = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t).e^{-jnW_0 t}dt$

Serie de Fourier (trigonométrica) - Aplicación al desarrollo de señales periódicas no senoidales

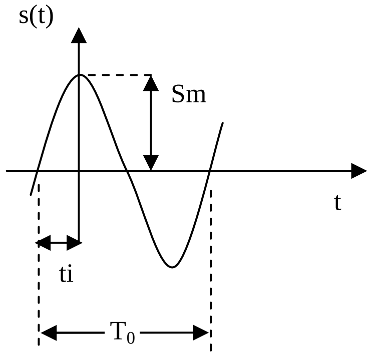
- La serie de trigonométrica de Fourier permite descomponer una señal periódica (que reúna ciertas condiciones), en función de senos y cosenos. Dichas condiciones (denominadas de ¨DIRICHLET¨) son:

1. La función que representa a la señal, debe ser periódica.
2. Debe poseer un n° finito de discontinuidades de 1er orden en el intervalo T.
3. Debe poseer un n° finito de puntos extremos (máximos y mínimos) en el intervalo T.

- La finalidad de esta descomposición es la de permitir hallar la respuesta de un circuito dado, a cada uno de los componentes elementales de la excitación (señal no senoidal) y luego obtener la respuesta total por aplicación del principio de superposición.

Dominios de tiempo y de frecuencia:

Hasta ahora, graficábamos una señal senoidal como: $s(t) = Sm\ .\mathrm{sen}\ (wt + \Theta i)$, tomando como variable independiente al tiempo y obteníamos:



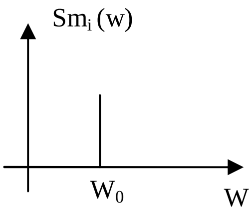
Siendo:

$$ti = \frac{\theta i}{W_0}$$

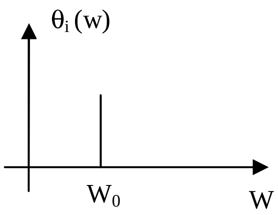
$$\text{y } W_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

GRAFICA EN
EL DOMINIO
DEL TIEMPO

La información que suministra es la de los valores: Sm, ti y T_0.
Pero si en lugar de t, tomamos a w como variable independiente, obtendremos una representación gráfica en el dominio de la frecuencia angular (w):



ESPECTRO DE AMPLITUD

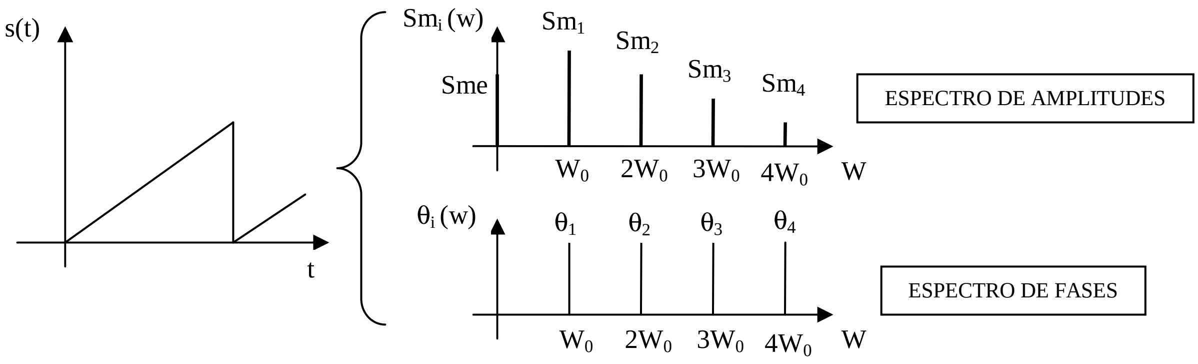


ESPECTRO DE FASE

REPRESENTACION
EN EL DOMINIO
DE LA FRECUENCIA

Esta representación, como vemos, suministra la misma información que la representación temporal.

Para una señal más compleja, como por ejemplo una de tipo diente de sierra, tendremos:



- En este caso, los espectros frecuenciales de amplitud y fase, tienen varias componentes para cada una de las frecuencias múltiplos de Wo denominada fundamental o 1era armónica. Las demás componentes, denominadas 2da, 3ra, 4ta, ….. armónica, son de frecuencias múltiplos enteros de Wo.
- La herramienta matemática que permite pasar del dominio temporal al dominio frecuencial es justamente la Serie de Fourier.
- El espectro que se obtiene es discreto (no continuo).
- $Si\ T \rightarrow \infty$ (señal aperiódica): $w \rightarrow 0$ı lo que se obtendría un espectro continuo, existiendo componentes para todo el espectro de frecuencias. Esto se analiza mediante la **Integral de Fourier**.

Serie de Fourier en función de Senos y Cosenos:

Puede expresarse matemáticamente como:

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(An\,.\cos nwt + Bm\,.\,sen\,nwt \right) \qquad \boxed{1}$$

Donde:
n = orden de la armónica

Bn = coeficiente de la componente senoidal de orden n

An = coeficiente de la componente cosenoidal de orden n

Integrales a utilizarse en el desarrollo:

Se puede demostrar que:

$$\int_0^{2\pi} \cos n w_o t \, d w_o t = 0$$

$$\int_0^{2\pi} sen\, n\, w_o t \, d w_o t = 0$$

$$\int_0^{2\pi} sen\, n w_o t \ . \cos n w_o t \, d w_o t = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{2\pi} sen\,nwt.sen\,mwt.dwt \\[2em] \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos nwt.\cos mwt.dwt\end{array}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq m \\ \pi & \text{para } n = m \end{cases}$$

Coeficientes de la serie:

Integrando ambos miembros de la ecuación $\boxed{1}$:

$$\int_0^{2\pi} s(t).dwt = \underbrace{\int_0^{2\pi} A_0 dwt}_{Ao.2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\underbrace{\int_0^{2\pi} An\cos nwt\,dwt}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} Bn.sen\,nwt\,dwt}_{=0}\right]$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(t).dwt \equiv Sme = \textbf{Valor medio de la señal}$$

Si ahora, multiplicamos a la ecuación $\boxed{1}$ por sen nwt e integramos:

$$\int_0^{2\pi} s(t).sen\,nwt\,dwt = \int A_0.\,sennwt.dwt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{2\pi} Bn.sen\,nwt\,.sen\,nwt\,dwt + \int_0^{2\pi} An.\cos nwt.sen\,nwt\,dwt\right]$$

$$\int_0^{2\pi} s(t).sen\,nwtdwt = \sum_{n=1}^{\infty} Bn.\pi = \pi.\sum_{n=1}^{\infty} Bn$$

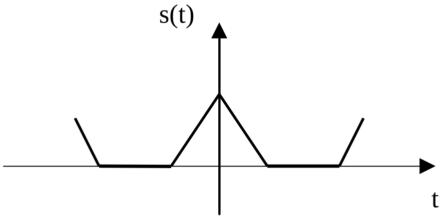
$$\therefore Bn = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s(t).sen\,n\,wt\,dwt$$

Si análogamente, se multiplica a la ecuación $\boxed{1}$ por cos nwt y se integra, obtendremos:

$$An = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s(t).\cos n\,wt\,dwt$$

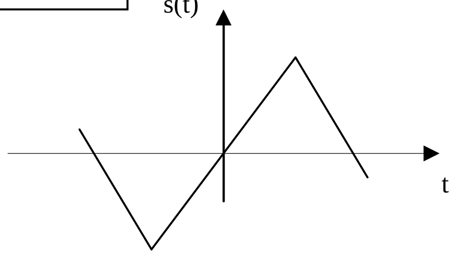
Tipos de simetrías de algunas señales periódicas:

PAR



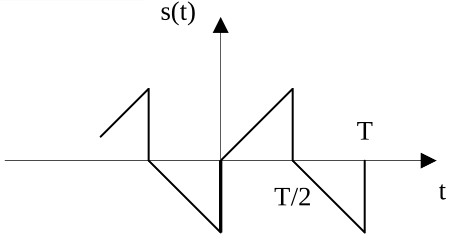
Si s(t) = s(-t) ⇨ (reflejo en "y") se demuestra que los términos con coeficientes Bn de la serie, son nulos.

IMPAR



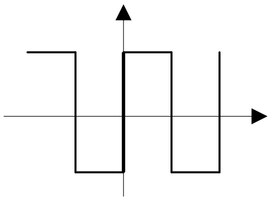
Si s(t) = - s(-t) ⇒ (reflejo en "y" e inversión en "x") los términos con coeficientes An de la serie, son nulos.

ALTERNA

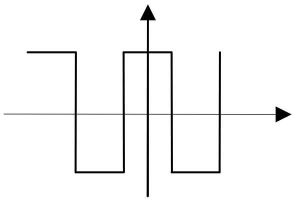


Si s(t) = - s(t + T/2) ⇒ (desplazamiento en T/2 e inversión en "x") los términos con coeficientes An y Bn de la serie con n = par, son nulos.

A veces, el tipo de simetría depende del instante en que se define a la señal:



Impar
y
alterna



Par
y
alterna

Serie de Fourier en función de senos solamente:

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Cn..sen\left(nwt + \theta n\right)$$

Dado que: $sen(\alpha + \beta) = sen\alpha.\cos\beta + sen\beta.\cos\alpha$

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(Cn.sen\,nwt.\cos\theta n + Cn.sen\theta n.\cos nwt\right)$$

Comparando con la ecuación $\boxed{1}$:

$$\begin{array}{l} \boxed{a} \\ \boxed{b} \end{array} \left.\boxed{\begin{array}{l} C_0 = A_0 \\ Bn = Cn.\cos\theta n \\ An = Cn.sen\theta n \end{array}}\right\}$$

Elevándolas al cuadrado y sumando:

$$Bn^2 + An^2 = Cn^2.\left(\cos^2\theta n + sen^2\theta n\right)$$

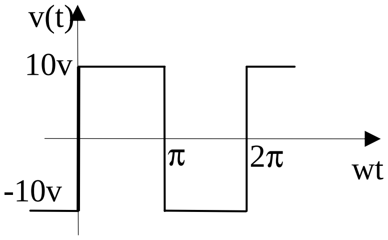
$$\therefore Cn = \sqrt{Bn^2 + An^2}$$

Haciendo b/a :

$$\frac{An}{Bn} = tg\,\theta n$$

$$\therefore \quad \theta n = arc\,tg\,\frac{An}{Bn}$$

Ejemplo de aplicación:



$$v(t) = \begin{cases} 10v & \forall\ 0 < wt < \pi \\ -10v & \forall\ \pi < wt < 2\pi \end{cases}$$

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Vn..sen\left(nwt + \theta n\right)$$

Por ser una señal de valor medio nulo: $A_0 = C_0 = V_0 = 0$

Por simetrías impar y alterna = An = 0 y $B_2 = B_4 = B_6 = ... = 0$

$$Bn = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} 10v\,sen\,nwt\,dwt + \int_{\pi}^{2\pi} (-10v).sen\,nwt\,dwt\right]$$

$$Bn = \frac{10}{\pi}\left\{\left[-\frac{\cos nwt}{n}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos nwt}{n}\right]_{\pi}^{2\pi}\right\}$$

$$Bn = \frac{10}{n\pi}\left[-\left(\cos n\pi - \cos 0\right) + \left(\cos n2\pi - \cos n\pi\right)\right]$$

$$Bn = \frac{10}{n\pi}\left(2 - 2\cos n\pi\right) = \frac{20}{n\pi}\left(1 - \cos n\pi\right)$$

$$B_1 = \frac{20}{\pi}\left(1 + 1\right) = 12{,}73$$

$$B_2 = \frac{20}{2\pi}\left(1 - 1\right) = 0$$

$$B_3 = \frac{20}{3\pi}(1+1) = 4{,}24$$

$$B_4 = 0$$

$$B_5 = \frac{20}{5\pi}(1+1) = 2{,}54$$

$$Cn = \sqrt{Bn^2 + An^2} = |Bn| = |Vn|$$

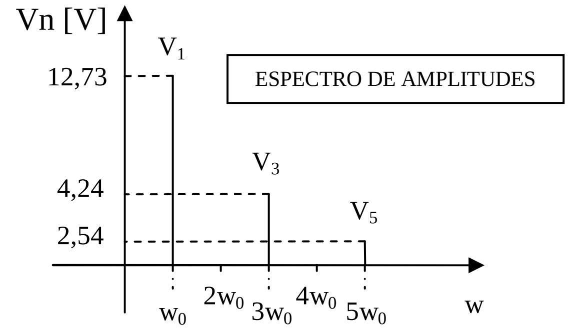
$$\theta_1 = arctg\,\frac{A_1}{B_1} = arctg\,\frac{0}{(+)} = 0 \qquad \theta_2 = \theta_4 = \theta_6 = ... = 0$$

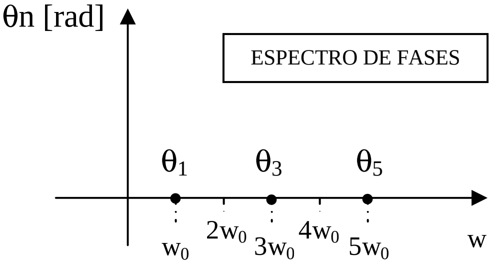
$$\theta_3 = arctg\,\frac{A_3}{B_3} = arctg\,\frac{0}{(+)} = 0$$

$$v(t) = V_0 + V_1\,sen(1w_ot + \theta_1) + V_2\,sen(2w_ot + \theta_2) + V_3\,sen(3w_ot + \theta 3) + ...$$

$$\therefore v(t) = 12{,}73\,sen\,w_ot + 4{,}24\,sen\,3w_ot + 2{,}54\,sen\,5w_ot + ...[V]$$

Representación frecuencial





Representación temporal