TEORÍA DE LOS CIRCUITOS II

REVISIÓN DE ANÁLISIS MATEMÁTICO
CONCEPTOS Y EJEMPLOS

INDICE

FUNCIONES:

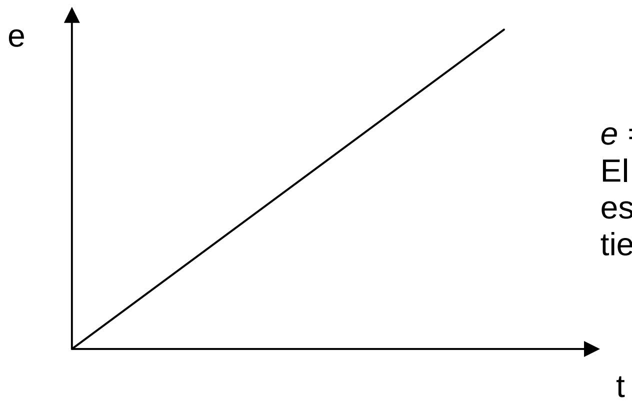
Definición de función: Es una relación de dependencia entre dos o más variables. O sea que una variable "*y*" es función de otra variable "*x*", si los valores de "y" dependen de los valores de "*x*".

$$y = f(x) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} y: \ \textit{variable dependiente} \\ x: \ \textit{variable independiente} \end{cases}$$

Ejemplo:
Recordemos la ecuación que caracteriza a un movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

$$e = v.\, t$$

$$\text{Donde:} \quad \begin{cases} e: \textit{distancia recorrida} \ (y) \\ t: \textit{tiempo transcurrido} \ (x) \\ v: \textit{velocidad del móvil (constante)} \end{cases}$$



$e = f(t)$
El recorrido "e", es función del tiempo "t"

Formas de expresar una función:

1) De manera implícita (variable dependiente sin despejar):

$$\mathbf{2y + 5x = 0}$$

2) De manera explícita (variable dependiente despejada):

$$\boldsymbol{y = f(x) = x + 2}$$

Valor instantáneo:

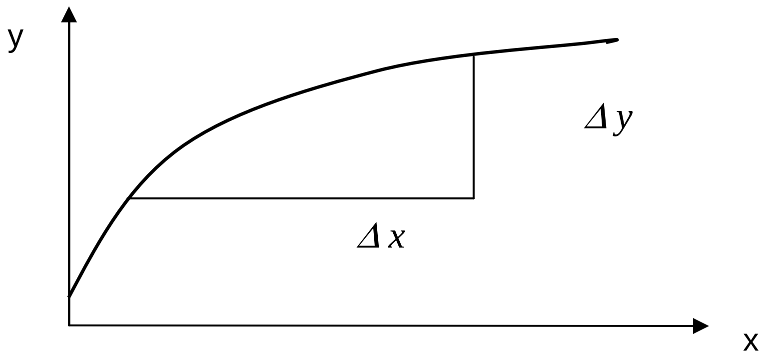
Es el valor que toma la función para un determinado valor de la variable "x"

Dada una función: $y = f(x)= 3x-7$

El valor instantáneo de f(x) para x = 4 (por ejemplo), será:

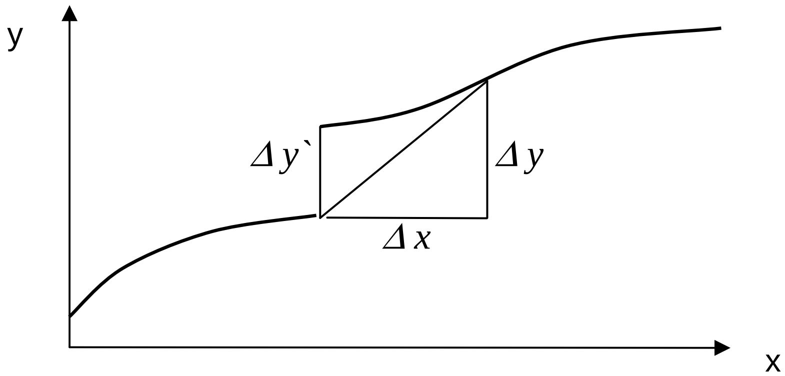
$$f(4)= 3 \,.\, 4 – 7 = 5$$

Funciones continuas: Son aquellas cuyo incremento tiende a cero, a medida que el incremento de la variable independiente tiende a cero.



$$\text{Si } \Delta x \to 0 \Longrightarrow \Delta y \to 0$$

Funciones discontinuas: Son aquellas cuyo incremento no tiende a cero, a medida que el incremento de la variable independiente tiende a cero.



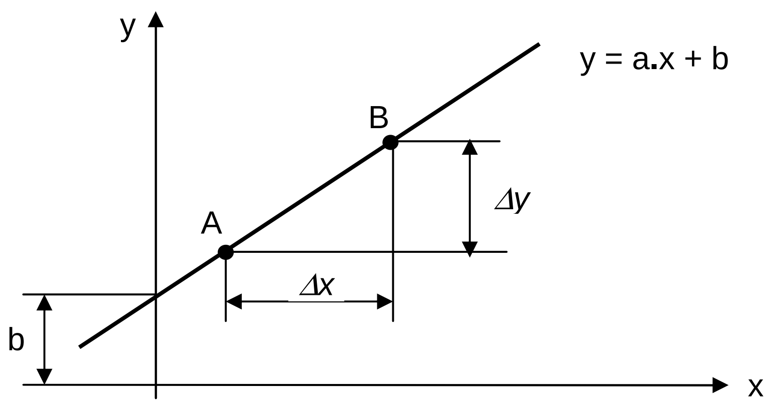
$$\text{Si } \Delta x \to 0 \Longrightarrow \Delta y \to \Delta y` \neq 0$$

FUNCION LINEAL (ECUACIÓN DE UNA RECTA):

Dada una función cuya representación gráfica se caracteriza por ser una recta, si conocemos su inclinación (pendiente) y la coordenada "y" con que corta al eje de ordenadas (ordenada al origen), podemos expresar su ecuación como:

$$y = a \bullet x + b$$

Donde: $\begin{cases} a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} & \Rightarrow \text{ pendiente} \\ b & \Rightarrow \text{ ordenada al origen} \end{cases}$



Si en cambio, conocemos su pendiente y las coordenadas de un punto cualquiera de la misma, su ecuación podríamos expresarla como:

$$y - y_p = a.\ (x - x_p)$$

Donde: $\begin{cases} a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} & \Rightarrow \text{ pendiente} \\ (x_p; y_p) & \Rightarrow \text{ coordenadas de un punto cualquiera de la recta} \end{cases}$

LÍMITES:

Concepto: Una constante *"a"* es el límite de una variable "x", si "x" se aproxima al valor de *"a"* de modo que $/x - a/$ pueda hacerse tan pequeño como se quiera.
Esto se expresa como "x" tendiendo a *"a"*: $(x \rightarrow a)$.

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 4} x + \frac{1}{x} = 4 + \frac{1}{4} = 4{,}25$$

Propiedades:

$$Lim\ (y + w - z) = Lim\ y + Lim\ w - Lim\ z$$

$$Lim\ (y \bullet z) = Lim\ y \bullet Lim\ z$$

$$Lim\ \frac{z}{y} = \frac{Lim\ z}{Lim\ y} \quad \text{si y sólo sí:} \quad Lim\ y \neq 0$$

Límites indeterminados:

Son aquellos que conducen a una relación del tipo: $\frac{0}{0}$

Ej.:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

Pero en ciertos casos, como en el ejemplo visto, dicha indeterminación puede salvarse:

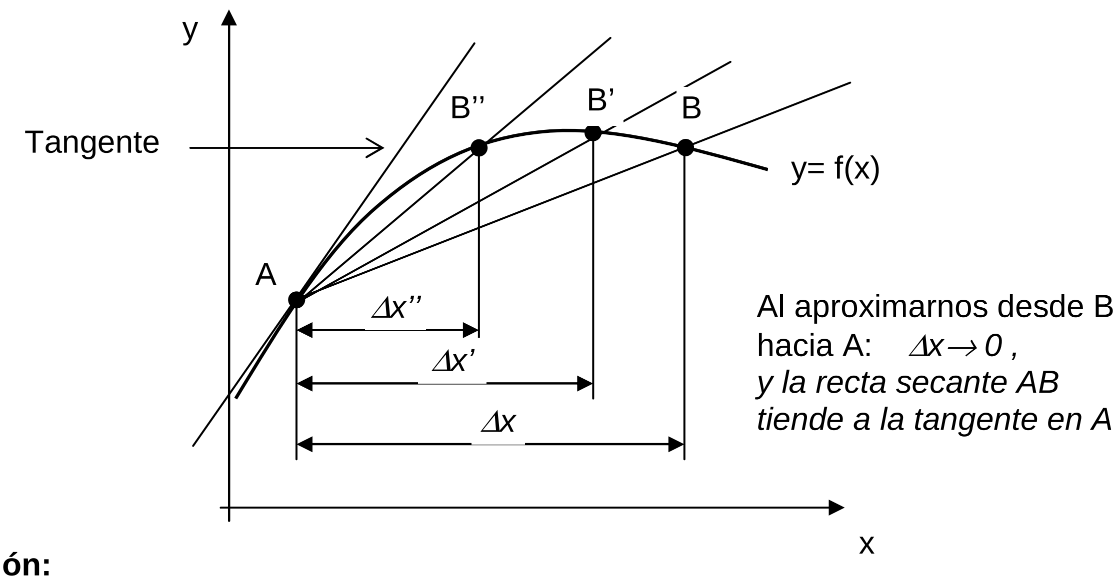
$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{(x+1) \bullet (x-1)}{x - 1} = 2$$

Otro caso sería:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\ \theta}{tg\ \theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{sen\ \theta}{\frac{sen\ \theta}{cos\ \theta}} = \lim_{\theta \to 0} cos\ \theta = cos\ 0 = 1$$

DERIVADAS:

Concepto: La derivada de una función, es la pendiente de la recta tangente a la curva que representa a dicha función, en un punto determinado.
Nota: La tangente a una curva es la recta que la toca en un sólo punto, a menos que la función sea otra recta, en cuyo caso la tangente coincide con la misma.



Definición:

Si $y = f(x)$ y $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *tiene un límite al tender* Δx *a cero, ese límite, se llama: derivada de "y" respecto de "x"*

La expresión de la derivada será:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad ó \quad f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Derivadas de las funciones algebraicas:

1) $y = C$ | *con* $C = constante$

$y' = 0$

2) *a)* $y = C \bullet x$ | *b)* $y = x$

$y' = C$ | $y' = 1$

3) $y = C \bullet u$ | *donde* $u = f(x)$

$y' = C \bullet u'$

4) $y = u \bullet v \Longrightarrow$ con: $u = f(x)$, $v = g(x)$

$y' = u' \bullet v + u \bullet v'$

5) $y = \dfrac{u}{v}$

$y' = \dfrac{u' \bullet v - u \bullet v'}{v^2}$

6) $y = u^m \Longrightarrow$ con m = constante

$y' = m \bullet u^{m-1} \bullet u'$

7) $y = u + v - w$

$y' = u' + v' - w'$

Ejemplos:

Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a)

$$y = 4.x^3 + 1$$

$$y` = 4.\,3.\,x^2 = 12.x^2$$

b)

$$y = \sqrt{x} + \frac{1}{x} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{2}} + x^{-1}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} - 1.x^{-2}$$

c)

$$y = \frac{3x-1}{(x-1)^3}$$

$$y` = \frac{\left[3 \cdot (x-1)^3\right] - \left[(3x-1) \cdot 3 \cdot (x-1)^{3-1}\right]}{[(x-1)^3]^2} = \frac{\left[3 \cdot (x-1)^3\right] - \left[(3x-1) \cdot 3 \cdot (x-1)^2\right]}{(x-1)^6}$$

$$y` = \frac{3(x-1)^2.[(x-1)-(3x-1)]}{(x-1)^6} = \frac{3.(-2x)}{(x-1)^4} = -\frac{6x}{(x-1)^4}$$

d)

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y = (x^2 - 1)^{1/2}$$

$$y` = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 1)^{1/2 - 1} \cdot 2x$$

$$y´ = (x^2 - 1)^{-1/2} x$$

e)

$$y = 5.(x^2 - 6).(3 - x) = 5.u.v$$

$$y' = 5.(u'.v + u.v') = 5.[2x.(3 - x) + (x^2 - 6)(-1)]$$

Derivadas de las funciones trascendentes (trigonométricas, logarítmicas y exponenciales):

8) $y = Sen\ u$ — si $u = x$:

$y´ = Cos\ u \bullet u´$ — $y' = Cos\ x$

9) $y = Cos\ u$ — si $u = x$:

$y´ = -\ Sen\ u \bullet u´$ — $y' = -\ Sen\ x$

10) $y = tg\ u$

$$y´ = \frac{1}{Cos^2\ u} \bullet u´ = Sec^2\ u\ .\ u´$$

11) $y = log_{\,a}\, u$

$$y´ = \frac{u´}{u} \bullet log_{\,e}\, a$$

12) $y = ln\ u$ — si $u = x$:

$y´ = \frac{u´}{u}$ — $y´ = 1/x$

13) $y = a^{u}$ $\Longrightarrow$ con a = constante

$$y´ = a^{u} \bullet ln\ a \bullet u´$$

14) $y = e^{u}$

$$y' = e^{u} \bullet u'$$

Ejemplos:

$a)$

$y = Sen^{2} 3x$

$y' = 2 \cdot (Sen\ 3x) \cdot (Cos\ 3x) \cdot 3$

$b)$

$y = 2x \cdot Cos\ 5x = u \cdot v$

$y' = 2(Cos\ 5x) + 2x \cdot (-Sen\ 5x) \cdot 5$

$c)$

$$y = \frac{4x^2}{Cosx^3} \Rightarrow y' = \frac{8x \cdot (Cosx^3) - 4x^2(-Senx^3) \cdot 3x^2}{(Cosx^3)^2}$$

$d)$

$$y = \ln\frac{1}{x} \Rightarrow \ln u \Rightarrow u = x^{-1} \Rightarrow u` = -x^{-2}$$

$$y` = \frac{-x^{-2}}{x^{-1}} \Rightarrow -x^{-2} \cdot x^{+1}$$

$$y' = -\frac{1}{x}$$

$e)$

$$y = 3^{x} \Rightarrow y' = 3^{x} \cdot \ln 3$$

$f)$

$$y = e^{(3x+2)} \Rightarrow y' = e^{(3x+2)} \cdot 3$$

$g)$

$$y = \sqrt{2 \cdot Sen^3 5x} \Rightarrow (2 \cdot Sen^3 5x)^{1/2}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot Sen^3 5x)^{-1/2} \cdot 6 \cdot Sen^2 5x \cdot Cos\,5x \cdot 5$$

DIFERENCIALES:

Dada una función: *y = f (x)* , habíamos visto que una de las expresiones de su derivada era: $y' = \frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{x}}$, la cual puede leerse como: el diferencial de la función “y” producido por un diferencial de la variable “x”. Por lo que el diferencial de “y”, será: *dy = y`. dx*

Ejemplos:

1) y = c (cte.) $\Longrightarrow$ *dy = 0*

2) y = u (x) $\Longrightarrow$ *dy = u`. dx*

3) $y = 5.x^4$ $\Longrightarrow$ $dy = 20.x^3.dx$

4) y = sen u $\Longrightarrow$ *dy = cos u . u`. dx*

5) y = u (x) . v (x) $\Longrightarrow$ $dy = (u`.\, v + u\, .\, v`).\, dx = \left(\frac{du}{dx}.v + u\,.\,\frac{dv}{dx} \right).\, dx$

$\therefore\ d(u.v) = u.dv + v.du$ *(fórmula que usaremos más adelante)*

INTEGRALES:

Integrales indefinidas:

Si y = f(x) $\Longrightarrow$ *diferenciando* $\Longrightarrow$ *dy = y`.dx*

Ahora: dy = y`. dx $\Longrightarrow$ *integrando* $\Longrightarrow$ $\int dy = \int y'dx = y = f(x)$

Volviendo a la función primitiva. Por lo tanto, la integración es la operación inversa a la diferenciación.

Por definición: $\int f(x).dx = \lim_{\Delta x \to 0} (\sum f(x).\Delta x)$

Fórmulas de integración:

$$1)\ \int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)].\ dx = \int f_1(x).\ dx + \int f_2(x).\ dx - \int f_3(x).\ dx$$

$$2)\ \int a.\ u(x)\ .dx = a.\ \int u(x)\ dx$$

$$3)\ \int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{para} \quad n \neq -1$$

$$4)\ \int x^{-1}.dx \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$5)\ \int \cos x\ .\ dx = \text{sen}\ x + C$$

$$6)\ \int \text{sen}\ x\ .\ dx = -\cos x + C$$

$$7)\ \int e^x.\ dx = e^x + C$$

Ejemplos:

a) $\int x^5 dx = \dfrac{x^6}{6} + C$

b) $\int 3.\sqrt{x}\,.\,dx = 3.\int x^{1/2}\,.\,dx = 3.\dfrac{x^{3/2}}{3/2} + C$

c) $\int \sec^2 x\,.\,dx = tg\ x + C$

Integración por sustitución: El método consiste en reemplazar la función a integrar o parte de ella, por una variable distinta, de manera tal que la nueva operación, pueda efectuarse por tabla.

Ejemplos:

1) $\int \sqrt{2x+1}.\,dx = \int (2x+1)^{1/2}.\,dx$

$= \int z^{1/2} \cdot \dfrac{dz}{2}$

$= \dfrac{1}{2}\int z^{1/2}.dz = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{Z^{3/2}}{3/2} + C$

$= \dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{(2x+1)^3} + C$

Si llamamos z al paréntesis:

$z = 2x+1$ *su diferencial será:*

$dz = Z'\,dx = 2.dx$

Despejando dx:

$dx = \dfrac{dz}{2}$

Reemplazando dx

2) $\int Cos\,8x \cdot dx = \int Cos\,u \cdot \dfrac{du}{8}$

$= \dfrac{1}{8}\int Cos\,u \cdot du = \dfrac{1}{8}\cdot Sen\,u + C$

$= \dfrac{1}{8}\ .\ Sen\,8x + C$

$u = 8.x$

$du = 8.dx$

$dx = \dfrac{du}{8}$

3) $\int \underbrace{sen^3 x}_{u^3} \cdot \underbrace{cos\ x \cdot dx}_{du}$

$= \int u^3\ .\ du$

$= \dfrac{u^4}{4} + C$

$= \dfrac{sen^4 x}{4} + C$

Llamamos $u = senx$

$\therefore du = cos\ x \cdot dx$

4) $\int \dfrac{x \cdot dx}{\sqrt{2x^2+1}} = \int \dfrac{du/4}{\sqrt{u}} =$

$= \dfrac{1}{4}.\int u^{-1/2}du = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{u^{1/2}}{1/2} + C =$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2x^2+1} + C$

$u = 2x^2 + 1$

$du = 4x \cdot dx$

$xdx = \dfrac{du}{4}$

5) $\int (8+x).dx = \int 8dx + \int xdx$

$$= 8 \cdot \int dx + \frac{x^2}{2} = 8x + \frac{x^2}{2} + C$$

Integración por partes: En aquellos casos en que el método de sustitución, no puede ser aplicado, por no ser factible el reemplazo total de la variable a integrar, se debe recurrir al presente método, que surge de la aplicación sistemática de la siguiente fórmula:

Vimos anteriormente que:

$$d\,(u.v) = u\,dv + v\,du$$

De donde:

$u\,dv = d\,(u.v) - v\,du$

Integrando ambos miembros y resolviendo:

$\int u\,dv = \int d\,(u\,v) - \int v\,du$

$\boxed{\int u\,dv = u\,v - \int v\,du}$ $\longrightarrow$ Fórmula de integración por partes

Ejemplos:

1) $\int \ln x \,.\, dx = \int u \,.\, dv =$

$= u \,.\, v - \int v \,.\, du = \ln x \,.\, x - \int x \,.\, \frac{1}{x} \,.\, dx =$

$= x.\ln x - \int dx = x.\ln x - x + C = x.(\ln x - 1) + C$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx$

$dv = dx \Rightarrow \int dv = \int dx$

$v = x$

2) $\int x^2 \cdot senx \cdot dx = x^2(-cosx) - \int (-cosx) \cdot 2x \cdot dx$

$= x^2.(-cosx) + 2 \cdot \int x \cdot cosx \cdot dx$

$= -x^2 \cdot cosx + 2.\left(x \cdot senx - \int senx \cdot dx\right)$

$= -x^2 \cdot cosx + 2x \cdot senx + 2 \cdot cosx + C$

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x \cdot dx$

$dv = sen\,x \cdot dx \Rightarrow v = \int sen\,x \,.\, dx$

$v = -\cos x$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos x \cdot dx \Rightarrow v = \int \cos x \,.\, dx$

$v = Senx$

3) $\int x \cdot \cos x \cdot dx = x \cdot senx - \int senx \cdot dx$

$= x \cdot senx - (-\cos x) + C$

$= x \cdot senx + \cos x + C$

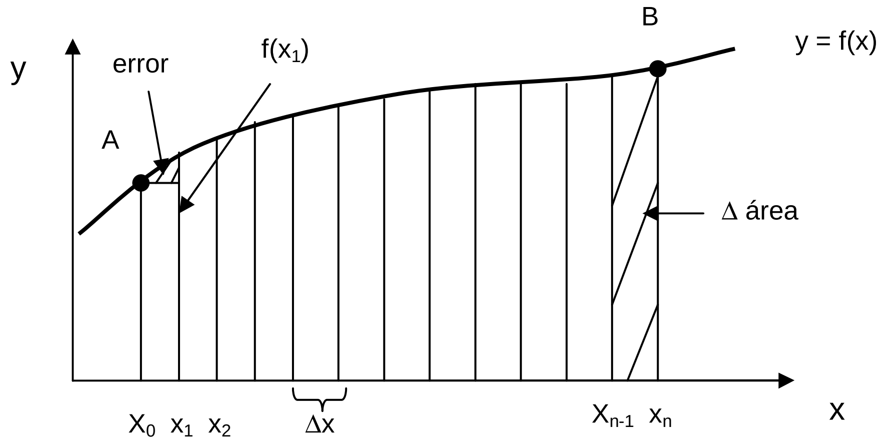
$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos x$

$\int dv = \int \cos x \,.\, dx$

$v = senx$

Integrales definidas:



Si $n \to \infty \;\Rightarrow\; \Delta x \to 0 \;\Rightarrow\;$ *error* $\to 0$

$$\acute{A}rea \cong f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots\dots\dots + f(x_{n-1})\Delta x =$$

$$\cong \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).\Delta x$$

$$\acute{A}rea = \frac{\lim}{\Delta x \to o} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).\Delta x = \frac{\lim}{\Delta x \to o} \sum_{x_a}^{x_b} f(x).\Delta x$$

$$= \int_a^b f(x).dx$$

El área total desde la curva al eje x, entre los puntos A y B, será la integral definida de la función *f (x)* en el intervalo *a – b, siendo a* y *b* los limites de la integración

ΔA = f (x) Δx

Si Δx → 0 ⇒ ΔA → dA

dA = f (x) dx

$$A(x) = \int_a^x da = \int_a^x f(x) \cdot dx = F(x) + C$$

El área desde x = a hasta un punto x, será:
Si x = a:

A(a) = F(x) + C = 0

Por lo cual: C = - A(a)

Si x = b:

A(b) = F(b) +C = F(b) – F(a)

$$\therefore \quad Área = \int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big]_a^b$$

Ejemplos de aplicación:

1) Hallar el área existente entre la curva representada por la función "y = x" y el eje de abcisas, entre los valores de $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$:

$$Área = \int_{x1}^{x2} y\,.\,dx = \int_0^2 x \cdot dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot (2^2 - 0^2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

2) Calcular las siguientes áreas:

$$\textbf{a)}\quad Área = \int_o^{\pi} Senx \cdot dx$$

$$Área = -Cosx \Big]_o^{\pi}$$

$$Área = -Cos\pi - (-Cos0) = -Cos\pi + Cos0 =$$

$$Área = 2$$

$$\textbf{b)}\quad Área = \int_1^3 3x^2 dx$$

$$Área = 3\int_1^3 x^2 dx = \frac{3x^3}{3}\Big]_1^3 = x^3\Big]_1^3 = 27 - 1$$

$$Área = 26$$