SISTEMAS DE CONTROL

ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA

En general los sistemas físicos reales, poseen ***inercias*** que les impiden seguir la señal de entrada de manera instantánea. Ésto implica la existencia de un período transitorio que es necesario conocer, así como el tiempo requerido para llegar al estado estacionario.
Veremos cómo responden un sistema de primer orden y otro de segundo orden sometidos a distintas entradas de prueba (Se supondrán condiciones iniciales nulas).

SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Entrada escalón unitario

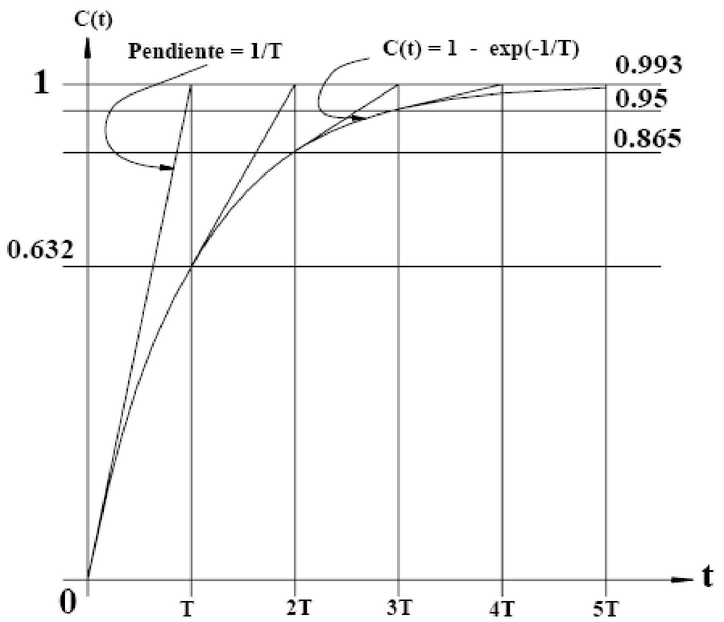
Sea la transferencia de un sistema de primer orden:

$$\frac{C}{R}=\frac{1}{T\cdot s+1} \quad ; \quad R=\frac{1}{s} \text{ , escalón unitario "transformado"}$$

$$C=R\cdot\frac{1}{T\cdot s+1}=\frac{1}{s\cdot(T\cdot s+1)} \quad , \quad \text{descomponiendo en fracciones simples} \Rightarrow$$

$$C=\frac{1}{s}-\frac{T}{T\cdot s+1} \quad , \quad \text{antitransformando} \Rightarrow$$

$$\boxed{c(t)=1-e^{-t/T}} \qquad (1)$$



"**T**" es la constante de tiempo del sistema y para un valor de 5 veces T, la respuesta es prácticamente igual a la entrada; por lo que si $t\rightarrow\infty$ el error (diferencia entre las señales de entrada y salida) tiende a cero.

Entrada rampa unitaria

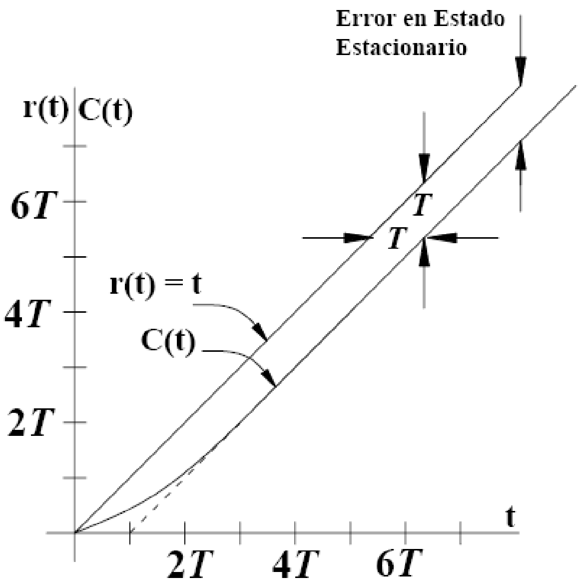
Sea:

$$\frac{C}{R}=\frac{1}{T\cdot s+1} \quad ; \quad R=\frac{1}{s^2} \text{ , rampa unitaria "transformada"}$$

$$C=R\cdot\frac{1}{T\cdot s+1}=\frac{1}{s^2\cdot(T\cdot s+1)} \quad , \quad \text{descomponiendo en fracciones simples} \Rightarrow$$

$$C=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T^2}{T\cdot s+1} \quad , \quad \text{antitransformando} \Rightarrow$$

$$\boxed{c(t)=t-T+T\cdot e^{-t/T}} \qquad (2)$$



SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

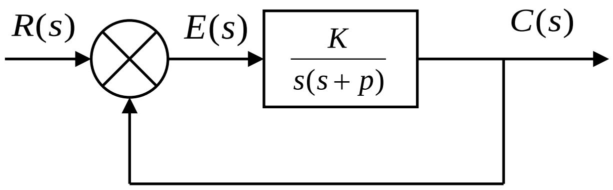
Los sistemas de segundo orden continuos son aquellos que responden a una ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$a_0\frac{d^2c(t)}{dt^2}+a_1\frac{dc(t)}{dt}+a_2c(t)=b_0\frac{d^2r(t)}{dt^2}+b_1\frac{dr(t)}{dt}+b_2r(t)$$

Sin pérdida de generalidad se analizará un caso muy común donde:

$$a_0=1,\ a_1=p,\ a_2=b_2=K,\ b_0=b_1=0.$$

Que corresponde al siguiente sistema de segundo orden:



Donde ***K*** es una constante que representa una ganancia y ***p*** es otra constante real que representa al polo del sistema.
Su función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + ps + K}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{\left(s + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - K}\right)\left(s + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - K}\right)}$$

Como se aprecia, los polos de lazo cerrado pueden ser de tres tipos:

1. Reales diferentes si: $\frac{p^2}{4} > K$

2. Reales iguales si: $\frac{p^2}{4} = K$

3. Complejos si: $\frac{p^2}{4} < K$

Para facilitar el análisis se realiza el siguiente cambio de variables:

$K = \omega_n^2$ $\qquad\qquad$ $p = 2\zeta\omega_n = 2\sigma$

Por lo que la transferencia de lazo cerrado de un sistema de segundo orden se puede expresar como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Siendo:

ω_n = frecuencia natural no amortiguada

ζ = relación de amortiguamiento (efectivo/crítico)

si: $0 < \zeta < 1 \Rightarrow$ sistema subamortiguado

$\zeta = 1 \Rightarrow$ sistema críticamente amortiguado

$\zeta > 1 \Rightarrow$ sistema sobreamortiguado

σ = atenuación = $\zeta.\omega$n

Ahora el comportamiento dinámico del sistema de segundo orden se describe en términos de los parámetros ζ y ωn.

Entrada escalón unitario

(1) Caso subamortiguado $(0<\zeta<1)$

en este caso: $$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n+j\omega_d)(s+\zeta\omega_n-j\omega_d)}$$

donde: $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

se denomina frecuencia natural amortiguada.

Si R(s) es una entrada escalón, entonces:

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)s}$$

Utilizando fracciones parciales:

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}-\frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

y conociendo que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}\right]=e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\zeta.\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}\right]=\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}sen\omega_d t$$

Se obtiene la salida en el tiempo:

$$c(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t_r}(\cos\omega_d t_r+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}sen\omega_d t_r)$$

(2) Caso de amortiguamiento crítico $(\zeta=1)$

En este caso se tienen dos polos reales iguales y C(s), ante un escalón es:

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2 s}$$

su transformada inversa es:

$$c(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t) \qquad (t\geq 0)$$

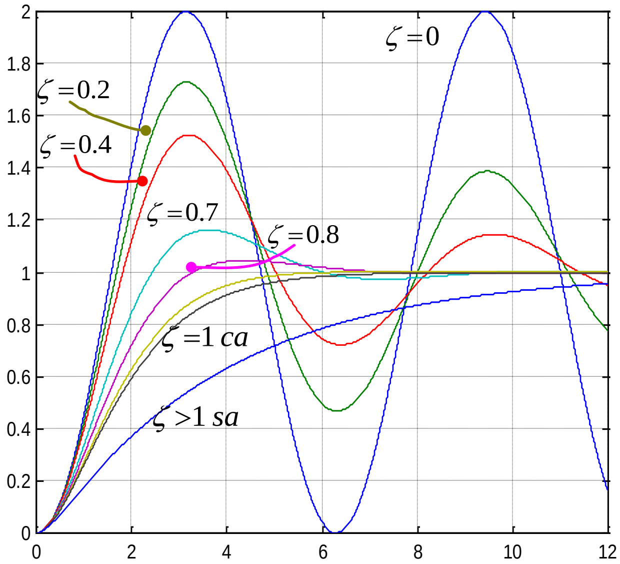
3) Caso sobreamortiguado $(\zeta>1)$

En este caso se tienen dos polos reales negativos y diferentes. Para una entrada escalón:

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})(s+\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})s}$$

La transformada inversa de Laplace de la ecuación anterior es:

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$$



En la figura anterior se ve la incidencia del parámetro ζ en la forma de la respuesta, según sea ζ el sistema será subamortiguado, amortiguado crítico ó sobre-amortiguado.
Se estudia la respuesta de un sistema de segundo orden ante una entrada escalón unitario ya que este tipo de entrada es lo bastante drástica como para probar la bondad del sistema en régimen transitorio. Además, si se conoce la respuesta ante este tipo de entrada, se puede calcular en forma analítica la respuesta ante cualquier tipo de entrada.

Entrada impulso unitario

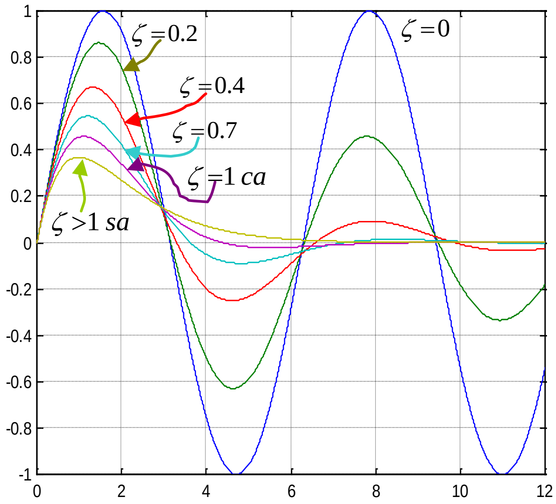
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Utilizando transformada inversa obtenemos las siguientes soluciones de c(t):

Para $(0 \le \zeta < 1)$ $$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} sen\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t \qquad (t \ge 0)$$

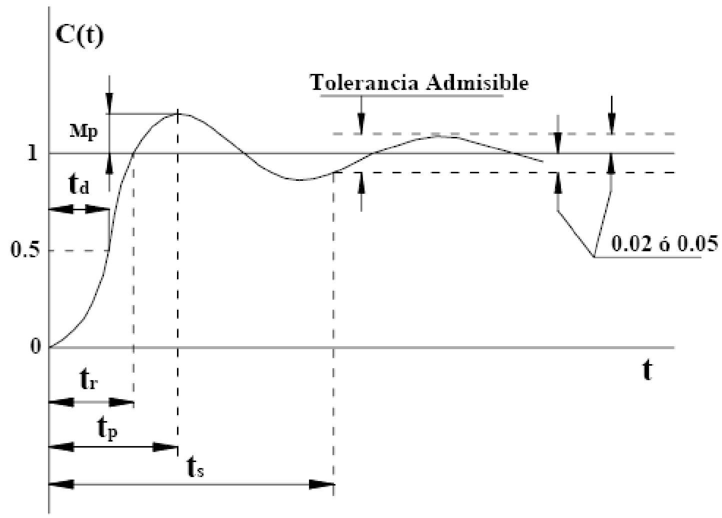
Para $(\zeta = 1)$ $$c(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\zeta\omega_n t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\zeta\omega_n t} \qquad (t \ge 0)$$

Para $(\zeta > 1)$ $$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \qquad (t \ge 0)$$



DESEMPEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL

Las características de desempeño de un sistema de control se comparan basándose en el tiempo de la repuesta transitoria. La característica transitoria de los sistemas dinámicos se presenta por la incapacidad de responder de manera instantánea a las entradas o perturbaciones. La respuesta transitoria es común clasificarla con base a los siguientes parámetros definidos a partir de la respuesta de un sistema de 2º orden ante una entrada escalón unitario:



Siendo:
t_d = tiempo de retardo
t_r = tiempo de crecimiento, levantamiento ó alcance
t_p = tiempo de pico, tomado hasta el primer pico de sobre-impulso
M_p = sobre-impulso, sobre-error ó sobrepaso máximo, medido desde la referencia (escalón unitario)
t_s = tiempo de establecimiento ó asentamiento, para el cual la respuesta difiere del valor final en un rango de 2~5% (en valor absoluto)
td: Es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar la mitad del valor final por primera vez.
tr: Es el tiempo requerido para que la respuesta aumente de 0 a 100% para sistemas subamortiguados, del 5 al 95% o del 10 al 90% para sistemas críticamente amortiguados o sobreamortiguados.
El tiempo de crecimiento se obtiene dando un valor de 1 en la ecuación de respuesta de un sistema de segundo orden ante una entrada escalón.

Según lo visto anteriormente (hoja 4):

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r}(\cos\omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} sen\omega_d t_r) = 1$$

$$\cos\omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} sen\omega_d t_r = 0$$

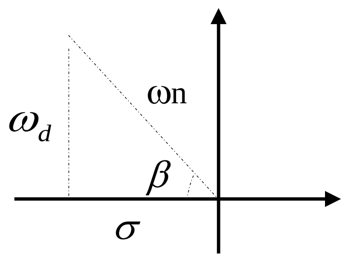
o bien:

$$\cos\omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\omega_d t_r \tan\omega_d t_r = \cos\omega_d t_r \left[1 + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\tan\omega_d t_r\right] = 0$$

$$\tan\omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

el tiempo de crecimiento es entonces:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{-\sigma}\right) = \frac{\pi-\beta}{\omega_d}, \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{\omega_d}{\sigma}$$



tp: Es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobre-impulso. El tiempo pico se obtiene derivando la ecuación de respuesta c(t) e igualándola a cero, con lo que se obtiene:

$$(sen\omega_d t_p)\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} = 0$$

$sen\omega_d t_p = 0$, *los valores que satisfacen esta ecuación son*

$0, \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$, *se elige el primer sobre-impulso.*

$$\omega_d t_p = \pi \qquad \Rightarrow \qquad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Mp: Es el valor pico máximo de la curva de respuesta medido desde la unidad o valor deseado. El sobre-impulso máximo se obtiene de la respuesta evaluada en el tiempo pico.

$$M_p = c(t_p) - 1 = -e^{-\zeta\omega_n(\pi/\omega_d)}\left(\cos\omega_d\frac{\pi}{\omega_d} + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} sen\omega_d\frac{\pi}{\omega_d}\right) = e^{-\zeta(\omega_n/\omega_d)\pi} = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}$$

$$M_p = e^{-\left(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)\pi}$$

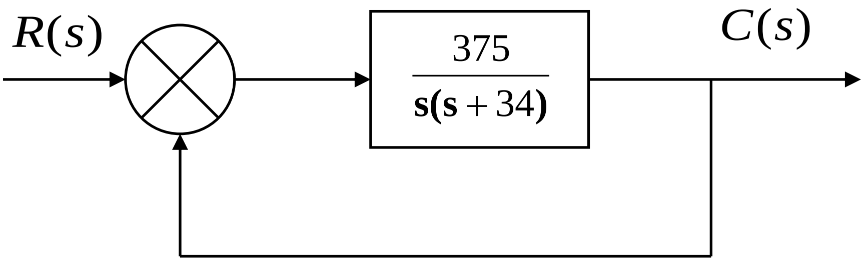
ts: Es el tiempo mínimo donde la curva de respuesta alcanza y se mantiene dentro de un rango de error preestablecido, generalmente es del 2% o del 5%, el rango más común es el del 2%. Para sistemas de primer y segundo orden, la respuesta se mantiene dentro del 2% después de 4 constantes de tiempo:

$$t_s = 4T = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma}$$

Para concluir comentaremos que es deseable que la respuesta sea rápida y amortiguada; para ello ζ debe estar en un rango de 0,4~0,8.
Valores pequeños de ζ producen sobre impulso excesivo mientras que valores altos hacen que la respuesta sea lenta.

Ejemplos:

1) Definir los parámetros de respuesta transitoria del siguiente sistema:



Desarrollo:

La función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{375}{s^2 + 34s + 375}$$

Comparándola con la expresión general:

$$\frac{375}{s^2 + 34s + 375} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Se obtiene:

$$\omega_n^2 = 375 \quad \dashrightarrow \quad \omega_n = \sqrt{375} = 19{,}365 \qquad \zeta\omega_n = \sigma = 17$$

$$2\zeta\omega_n = 34 \quad \dashrightarrow \quad \zeta = \frac{34}{2\sqrt{375}} = 0.877876 \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{86} = 9{,}27$$

A partir de aquí se obtienen los parámetros de respuesta transitoria:

$$\beta = \tan^{-1}\frac{\omega_d}{\sigma} = 0.499 \text{ rad.}$$

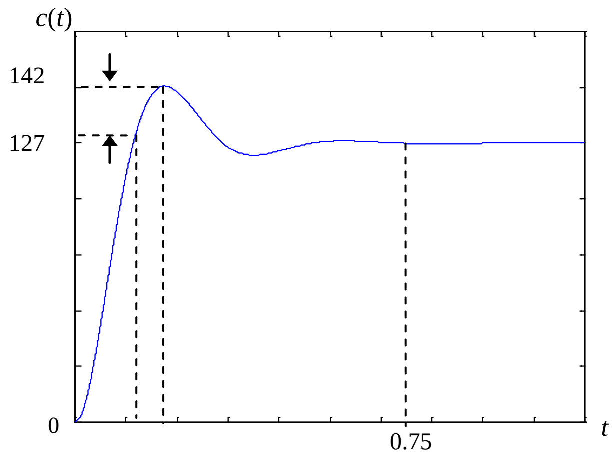
$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = 0.285 \text{ segundos}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0.33876 \text{ segundos}$$

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 0.23529 \text{ segundos}$$

$$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = 0.00315 = 0.315\%$$

2) De los siguientes parámetros de respuesta transitoria obtener la función de transferencia:



Desarrollo:

De la gráfica:

$$M_p = \frac{142-127}{127} = 0.1181$$

$$t_s = 0.75 \text{segundos}$$

Como:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{4}{t_s} = 5.3333$$

De Mp y conociendo **σ**:

$$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} \rightarrow \omega_d = \frac{-\sigma\pi}{\ln M_p} = 7.84335$$

Entonces:

$$\sigma = 5.3333 \qquad \omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2} = 9.48486$$

$$\omega_d = 7.84335 \qquad \zeta\omega_n = \sigma \rightarrow \zeta = \frac{\sigma}{\omega_n} = 0.56229$$

Por consiguiente:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{89.96256}{s^2 + 10.666s + 89.96256}$$