

## SISTEMAS DE CONTROL

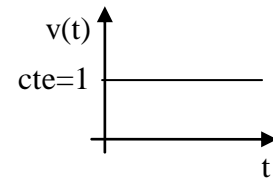
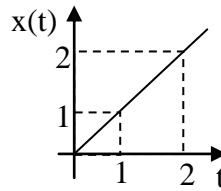
# MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS FÍSICOS

### Sistemas mecánicos de traslación

Estudiaremos las siguientes variables puestas en juego en estos sistemas:

$$x_{(t)} \Rightarrow \text{posición} \quad v_{(t)} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \Rightarrow \text{velocidad} \quad a_{(t)} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \Rightarrow \text{aceleración}$$

Ej.) Para un Mov. Rectilíneo Uniforme:



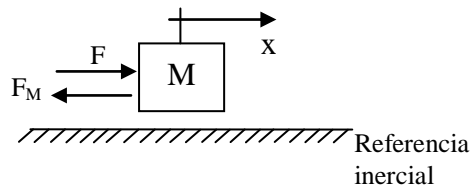
A su vez, los sistemas mecánicos de traslación lineales se caracterizan por tres parámetros que son:

**M:** Es la masa de todo cuerpo y representa su capacidad para almacenar energía cinética.

**K:** Es la elasticidad de todo cuerpo y representa su capacidad para almacenar energía potencial.

**B:** Es el rozamiento o coeficiente de viscosidad de todo cuerpo y representa su capacidad para transformar un tipo de energía en otra.

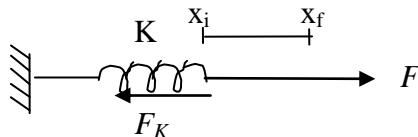
1) Ley de Newton:



$$F_M = M \cdot \ddot{x}$$

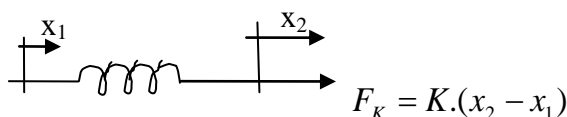
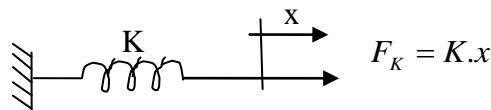
$F_M$ : Es la fuerza de inercia que la masa M opone a la fuerza F aplicada.

2) Ley de Hook:



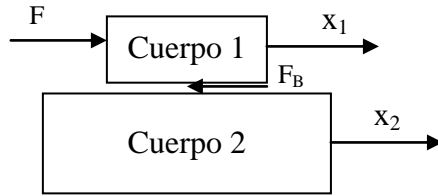
$$F_K = K \cdot (x_f - x_i)$$

$F_K$ : Es la fuerza elástica de reacción a la fuerza F aplicada al resorte



3) Leyes que rigen el rozamiento:

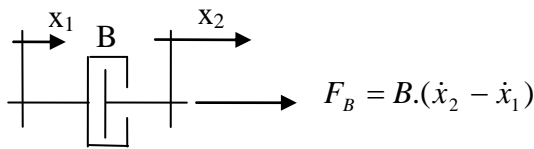
a) Fricción entre cuerpos:



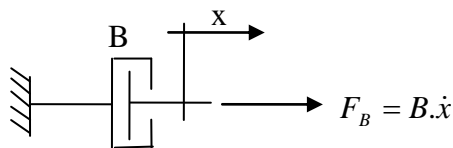
$F_B$ : Fuerza de rozamiento que se opone a la acción de F

$$F_B = B.(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

b) Amortiguador:

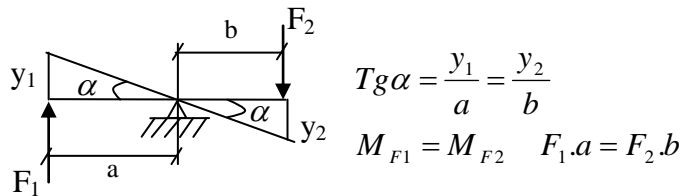


$$F_B = B.(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$



$$F_B = B.\dot{x}$$

4) Sistemas de palancas:



$$\text{Tg}\alpha = \frac{y_1}{a} = \frac{y_2}{b}$$

$$M_{F_1} = M_{F_2} \quad F_1.a = F_2.b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

Ejemplo:

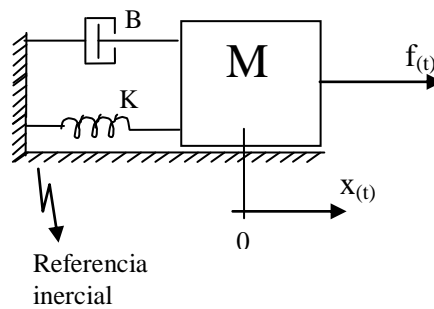
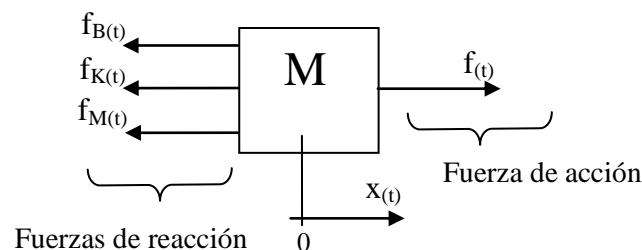


Diagrama de cuerpo libre:





$$\sum f_{ext} = 0 \quad \text{o bien :} \quad \sum f_{result\ ext} = m.\ddot{x}_{(t)}$$

$$f_{(t)} - f_{B(t)} - f_{K(t)} - f_{M(t)} = 0$$

$$f_{(t)} = f_{M(t)} + f_{B(t)} + f_{K(t)}$$

$$f_{(t)} = M.\ddot{x}_{(t)} + B.\dot{x}_{(t)} + K.x_{(t)}$$

$\downarrow \mathcal{L}$

$$F_{(s)} = M.s^2.x_{(s)} + B.s.x_{(s)} + K.x_{(s)}$$

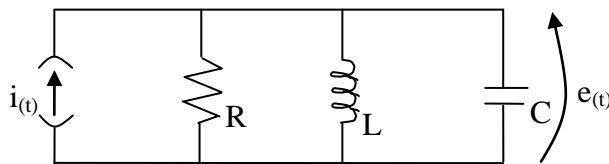
$$F_{(s)} = (M.s^2 + B.s + K).x_{(s)}$$

$$\frac{x}{F}(s) = \frac{1}{M.s^2 + B.s + K}$$

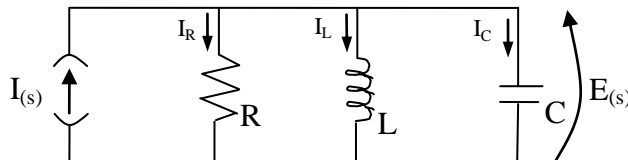
$$\begin{cases} \dot{x}_{(s)} = s.x_{(s)} \\ \ddot{x}_{(s)} = s^2.x_{(s)} \end{cases}$$

$$\frac{\dot{x}}{F}(s) = \boxed{\frac{s}{M.s^2 + B.s + K}}$$

### Analogía electromecánica:



$\downarrow \mathcal{L} \text{ (CIN)}$



$$I_{(s)} = I_{R(s)} + I_{L(s)} + I_{C(s)}$$

$$I_{(s)} = \frac{E_{(s)}}{R} + \frac{E_{(s)}}{S.L} + \frac{E_{(s)}}{1/S.C}$$

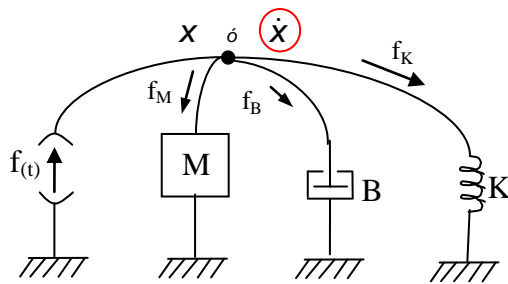
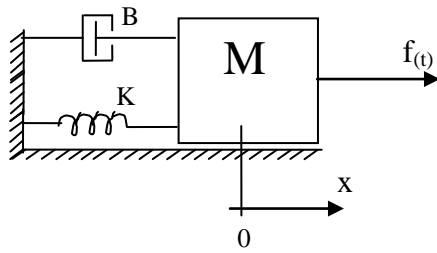
$$I_{(s)} = E_{(s)} \cdot \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{S.L} + S.C \right)$$

$$\frac{E}{I}(s) = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{S.L} + S.C} = \boxed{\frac{S}{S^2.C + \frac{1}{R}.S + \frac{1}{L}}}$$

$$M \cong C \quad K \cong \frac{1}{L} \quad B \cong \frac{1}{R} \quad F \cong I \quad \dot{x} \cong E$$



Circuito equivalente:



$$f_{(t)} = f_{M(t)} + f_{B(t)} + f_{K(t)} \xrightarrow{\mathcal{L}} F_{(s)} = F_{M(s)} + F_{B(s)} + F_{K(s)}$$

$$F_{(s)} = M \cdot \ddot{x}_{(s)} + B \cdot \dot{x}_{(s)} + K \cdot x_{(s)}$$

$$F_{(s)} = M \cdot s^2 \cdot x_{(s)} + B \cdot s \cdot x_{(s)} + K \cdot x_{(s)}$$

$$F_{(s)} = (M \cdot s^2 + B \cdot s + K) \cdot x_{(s)}$$

$$\frac{x}{F}(s) = \frac{1}{M \cdot s^2 + B \cdot s + K}$$

$$\frac{\dot{x}}{F}(s) = \frac{s}{M \cdot s^2 + B \cdot s + K}$$

$$\text{Si } f_{(t)} = f_0 \cdot \mu_{(t)} \Rightarrow F_{(s)} = \frac{F_0}{s}$$

Teorema del valor inicial:

$$x_{(t=0)} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot x_{(s)}$$

Teorema del valor final (para hallar el régimen permanente):

$$x_{(t \rightarrow \infty)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot x_{(s)}$$



$$x_{(t=0)} = s \cdot \frac{F(s)}{M \cdot S^2 + B \cdot S + K} \Bigg|_{s \rightarrow \infty} = 0$$

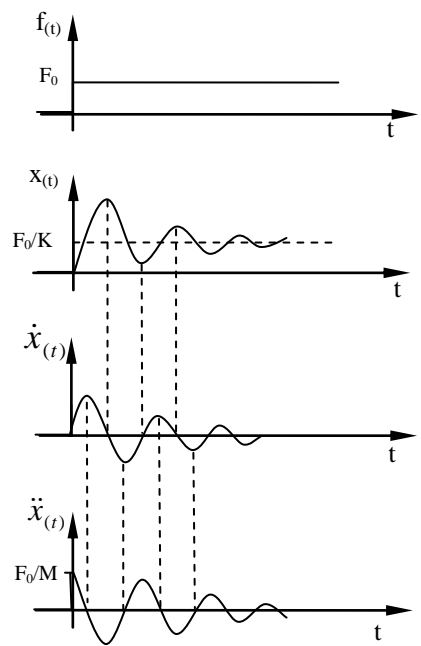
$$\dot{x}_{(t=0)} = s \cdot \frac{F_0}{s \cdot (M \cdot S^2 + B \cdot S + K)} \Bigg|_{s \rightarrow \infty} = 0$$

$$\ddot{x}_{(t=0)} = \frac{F_0 \cdot S^2}{M \cdot S^2 + B \cdot S + K} \Bigg|_{s \rightarrow \infty} = \frac{F_0}{M + \frac{B}{S} + \frac{K}{S^2}} \Bigg|_{s \rightarrow \infty} = \frac{F_0}{M}$$

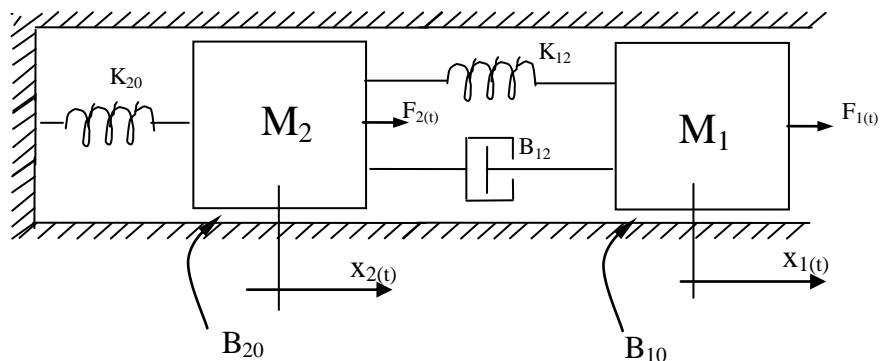
$$x_{(t \rightarrow \infty)} = s \cdot \frac{F_0}{s \cdot (M \cdot S^2 + B \cdot S + K)} \Bigg|_{s \rightarrow 0} = \frac{F_0}{K}$$

$$\dot{x}_{(t \rightarrow \infty)} = \frac{F_0 \cdot S}{M \cdot S^2 + B \cdot S + K} \Bigg|_{s \rightarrow 0} = \frac{F_0}{M \cdot S + B + K/S} \Bigg|_{s \rightarrow \infty} = 0$$

$$\ddot{x}_{(t \rightarrow \infty)} = \frac{F_0 \cdot S^2}{M \cdot S^2 + B \cdot S + K} \Bigg|_{s \rightarrow 0} = 0$$



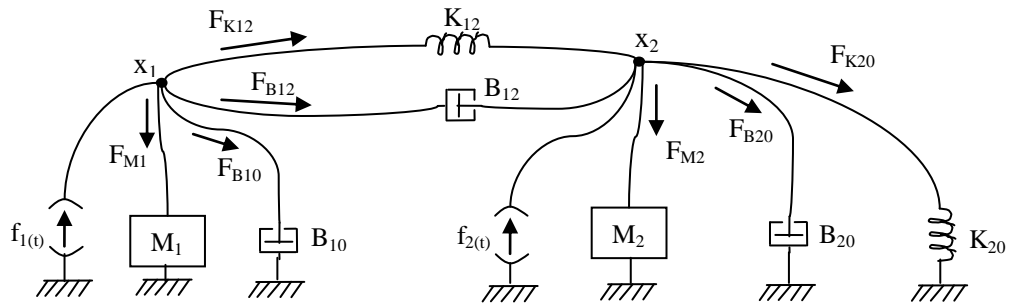
Otro Ejemplo:



**Pasos:**

1º) Identificar cuántos puntos de distinto desplazamiento existen en el sistema (En nuestro caso:  $x_1$  y  $x_2$ ).

2º) Dibujar el circuito equivalente:



3º) Expresar matemáticamente las ecuaciones que se desprenden del análisis del circuito.

*Nodo  $x_1$ )*

$$F_{1(s)} = F_{M1} + F_{B10} + F_{K12} + F_{B12} = M_1 \cdot \ddot{X}_1 + B_{10} \cdot \dot{X}_1 + K_{12}(X_1 - X_2) + B_{12}(\dot{X}_1 - \dot{X}_2)$$

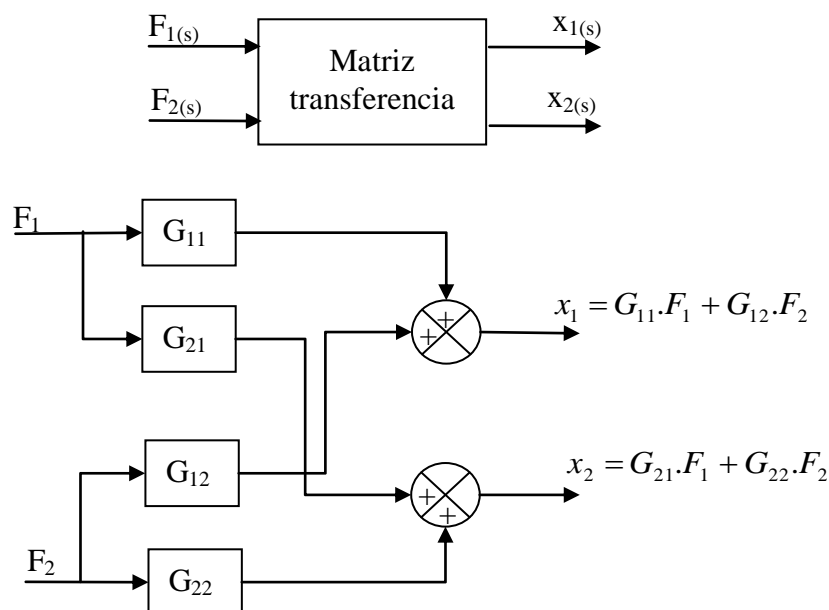
$$F_{1(s)} = (M_1 \cdot S^2 + B_{10} \cdot S) \cdot X_1 + K_{12} \cdot (X_1 - X_2) + B_{12} \cdot S \cdot (X_1 - X_2)$$

$$F_{1(s)} = [M_1 \cdot S^2 + (B_{12} + B_{10}) \cdot S + K_{12}] X_{1(s)} - (K_{12} + B_{12} \cdot S) \cdot X_{2(s)}$$

*Nodo  $x_2$ )*

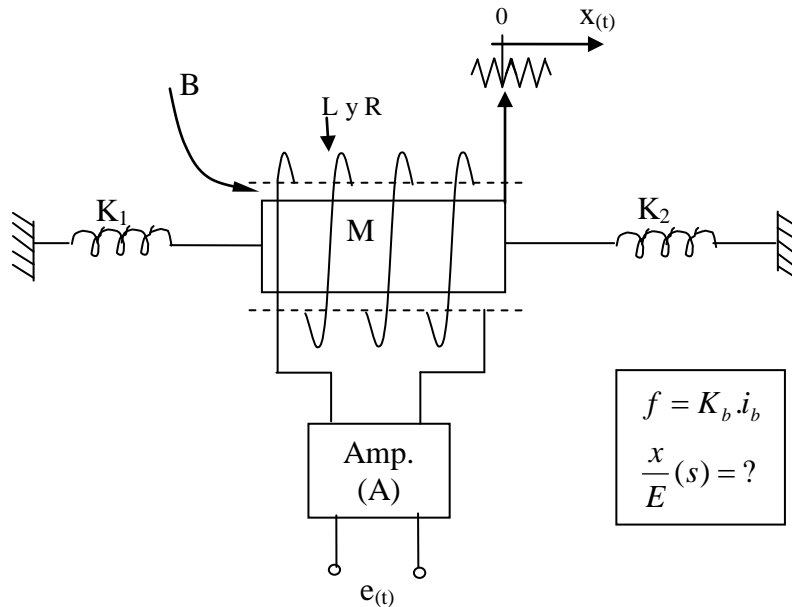
$$F_{2(s)} + K_{12} \cdot (X_1 - X_2) + B_{12} \cdot S \cdot (X_1 - X_2) = (M_2 \cdot S^2 + B_{20} \cdot S + K_{20}) \cdot X_2$$

$$F_{2(s)} = -(K_{12} + B_{12} \cdot S) \cdot X_{1(s)} + [M_2 \cdot S^2 + (B_{12} + B_{20}) \cdot S + (K_{12} + K_{20})] X_{2(s)}$$



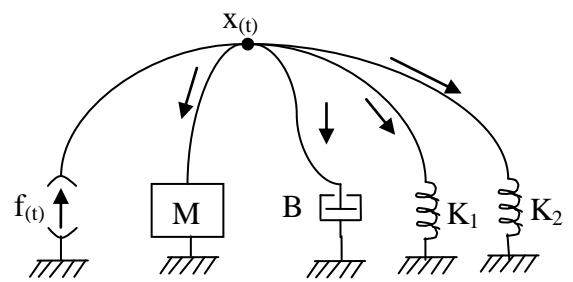
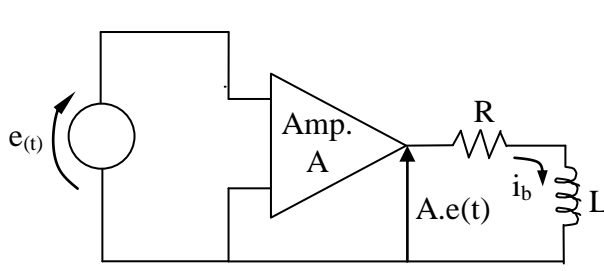
4º) Hallar la transferencia pedida, mediante reducción de bloques.

Ejemplo de sist. electromecánico: Instrumento de hierro móvil



$$f = K_b \cdot i_b$$

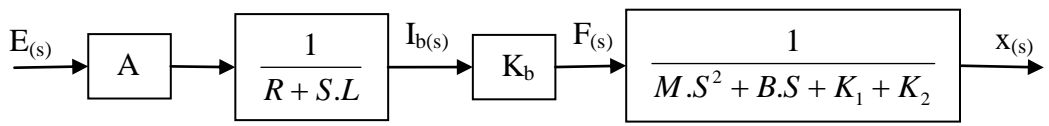
$$\frac{x}{E}(s) = ?$$



$$I_b(s) = \frac{A \cdot E(s)}{R + S.L}$$

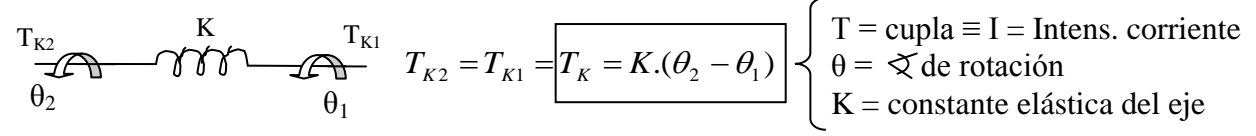
$$F(s) = K_b \cdot I_b(s)$$

$$F(s) = (M.S^2 + B.S + K_1 + K_2) \cdot x(s)$$

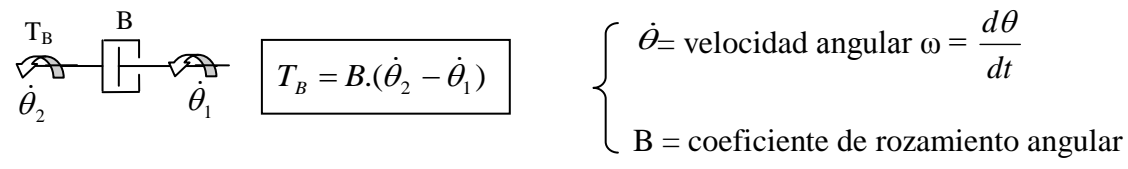


Elementos mecánicos animados con movimiento de rotación

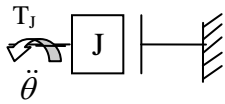
1)



2)



3)

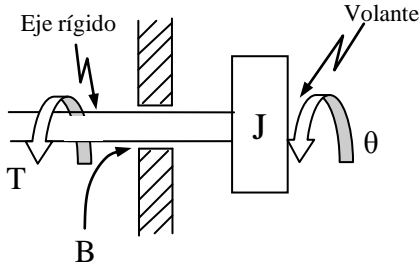


$$T_J = J \cdot \ddot{\theta}$$

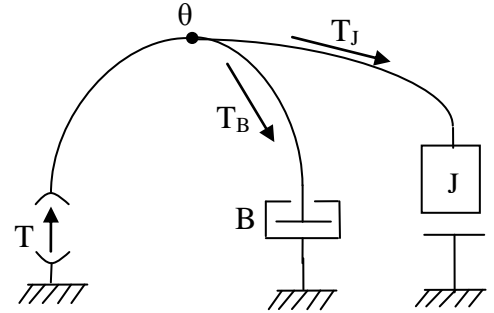
$$\begin{cases} J = \text{momento de inercia} \\ \ddot{\theta} = \text{aceleración angular} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

Ejemplos:

1)



$$\frac{\dot{\theta}}{T}(s) = ?$$



$$T = T_B + T_J$$

$$T_B = B \cdot \dot{\theta}$$

$$T_J = J \cdot \ddot{\theta}$$

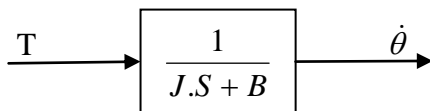
↓  $\mathcal{L}$

$$T_{(s)} = \underbrace{B \cdot S \cdot \theta_{(s)}}_{\dot{\theta}(s)} + \underbrace{J \cdot S^2 \cdot \theta_{(s)}}_{S \cdot \dot{\theta}(s)}$$

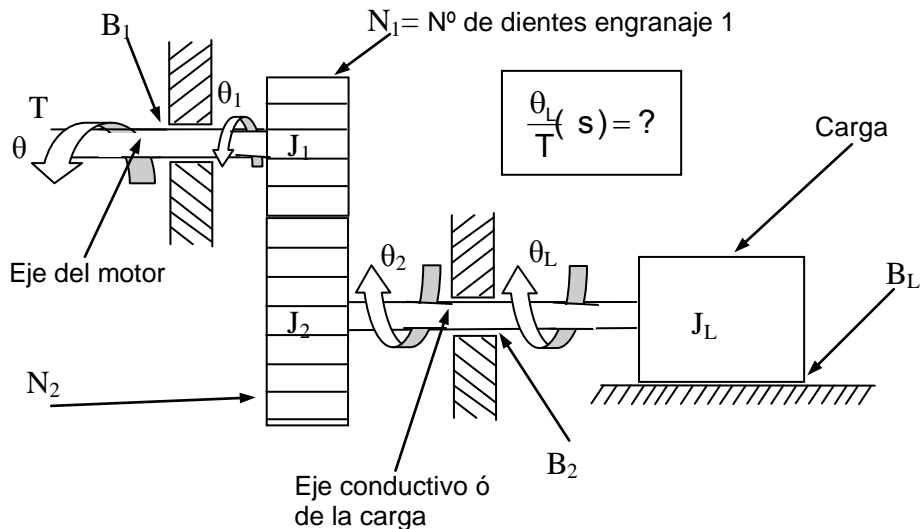
$$T_{(s)} = (B \cdot S + J S^2) \cdot \theta_{(s)}$$

$$T_{(s)} = (B + J S) \cdot \dot{\theta}_{(s)} \rightarrow \frac{\dot{\theta}}{T}(s) = \frac{1}{J \cdot S + B}$$

Diagrama de bloques:



2) Sistema mecánico de rotación con tren de engranajes:







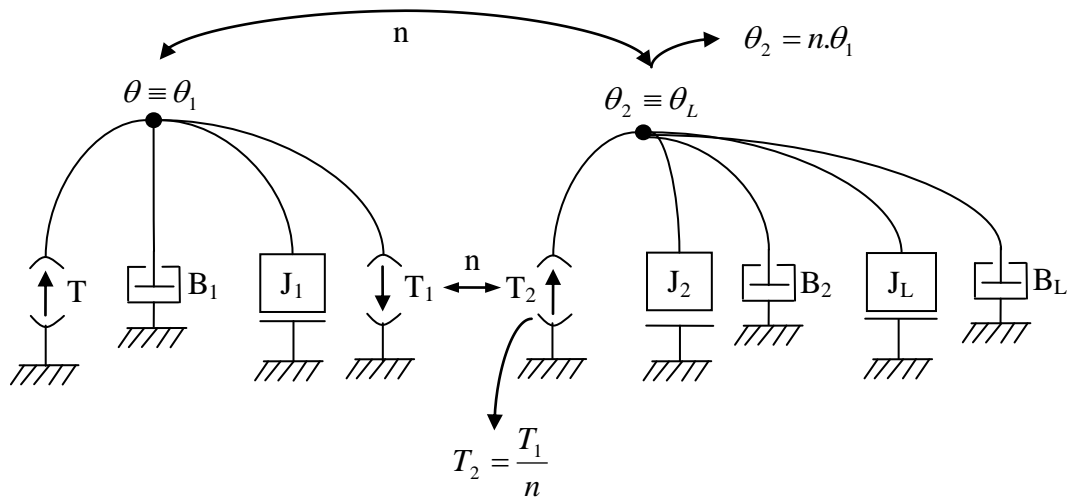
$$n = \frac{N_1}{N_2} = \text{relación de engranajes}$$

Trabajo mecánico $T_1 \cdot \theta_1 = T_2 \cdot \theta_2$	Potencia mecánica $T_1 \cdot \dot{\theta}_1 = T_2 \cdot \dot{\theta}_2$
---	--

$$\Downarrow \quad (N_1 \cdot \theta_1 = N_2 \cdot \theta_2 = \text{cte.})$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{T_1}{T_2} \quad \boxed{n = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{T_1}{T_2}}$$

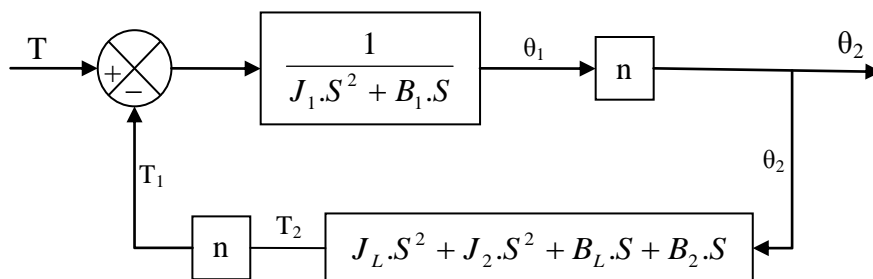
Circuito equivalente:



$$T = J_1 \cdot S^2 \cdot \theta_1 + B_1 \cdot S \cdot \theta_1 + T_1 \Rightarrow T - T_1 = (J_1 \cdot S^2 + B_1 \cdot S) \cdot \theta_1$$

$$T_2 = J_2 \cdot S^2 \cdot \theta_2 + J_L \cdot S^2 \cdot \theta_2 + B_2 \cdot S \cdot \theta_2 + B_L \cdot S \cdot \theta_2$$

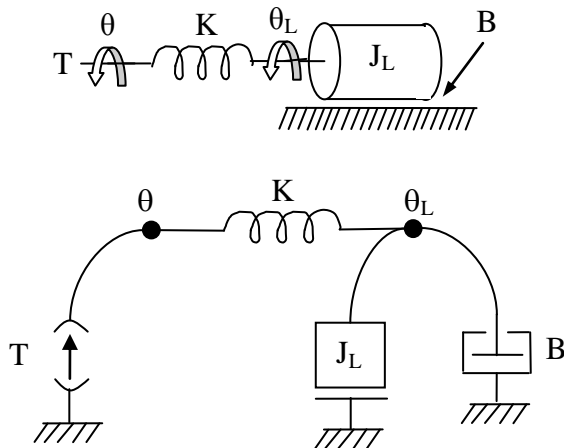
$$T_2 = (J_2 \cdot S^2 + J_L \cdot S^2 + B_2 \cdot S + B_L \cdot S) \cdot \theta_2$$



Resultando:

$$\boxed{\frac{\theta_2(s)}{T} = \frac{n}{(J_1 \cdot S^2 + B_1 \cdot S) + n^2 [(J_2 + J_L) \cdot S^2 + (B_2 + B_L) \cdot S]}}$$

3)



θ)

$$T = K.(\theta - \theta_L)$$

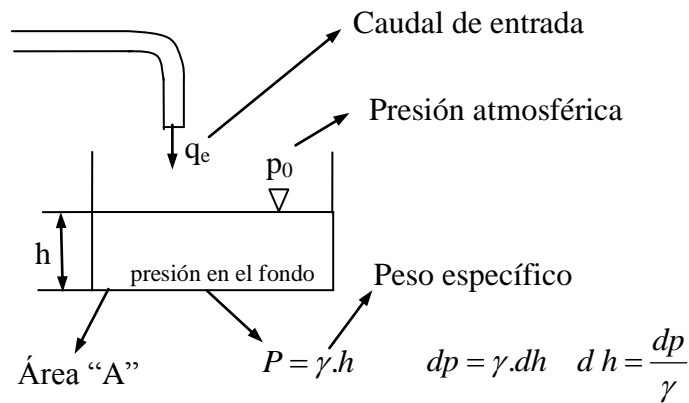
θ2)

$$\underbrace{K.(\theta - \theta_L)}_T = (J_L.S^2 + B.S).\theta_L$$

$$\frac{\theta_L}{T} = \frac{1}{J_L.S^2 + B.S}$$

### Sistemas de nivel de líquidos

Trabajaremos con líquidos ideales, es decir, incompresibles y sin variación de densidad con la temperatura.



Caudal volumétrico  $q_e = \frac{vol \text{ líq}}{t}$

si  $vol \neq cte$ :  $q_e = \frac{dvol}{dt}$   $dvol = q_e \cdot dt$   $vol = A \cdot h$   $dvol = A \cdot dh$

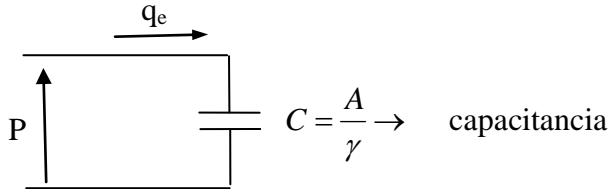
$$\left\{ \begin{array}{l} q_e \cdot dt = A \cdot dh \\ q_e = A \cdot \frac{dh}{dt} \end{array} \right.$$

$$q_e = \frac{A}{\gamma} \cdot \frac{dp}{dt}$$

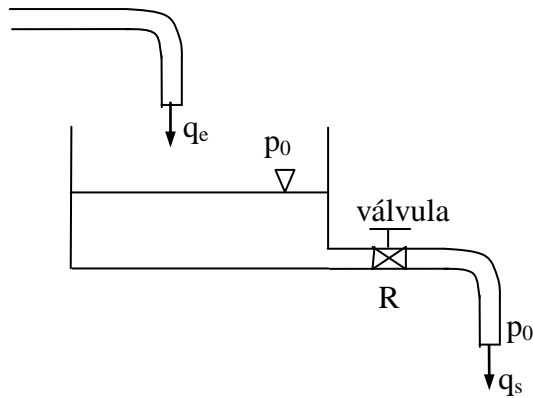


$$i_{(t)} = C \cdot \frac{de}{dt} \quad I_{(s)} = \frac{1}{sC} E_{(s)}$$

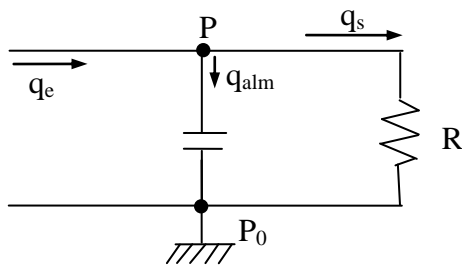
Circuito equivalente:



Agregado de válvula:



Circuito equivalente:

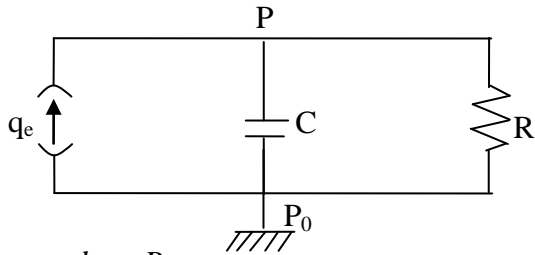


Condición de equilibrio:

$$q_e = q_{alm} + q_s$$

$$q_{alm} = C \cdot \frac{dp}{dt}$$

$$q_s = \frac{\Delta P}{R} = \frac{P + P_0 - P_0}{R} = \frac{P}{R}$$



$$p = \gamma \cdot h$$

$$P_{(s)} = \gamma \cdot H_{(s)}$$

$$q_e = C \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{P}{R}$$

↓  $\mathcal{L}_g$

$$Q_{e(s)} = C \cdot S \cdot P_{(s)} + \frac{1}{R} \cdot P_{(s)}$$

$$Q_{e(s)} = \left( S \cdot C + \frac{1}{R} \right) \cdot P_{(s)}$$

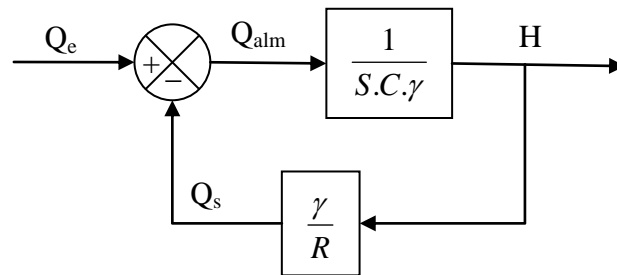
$$\therefore Q_{e(s)} = \left( S \cdot C + \frac{1}{R} \right) \cdot \gamma \cdot H_{(s)} = \frac{S \cdot C \cdot R + 1}{R} \cdot \gamma \cdot H_{(s)}$$

$$\frac{H}{Q_e}(s) = \frac{R}{(S \cdot C \cdot R + 1) \cdot \gamma}$$

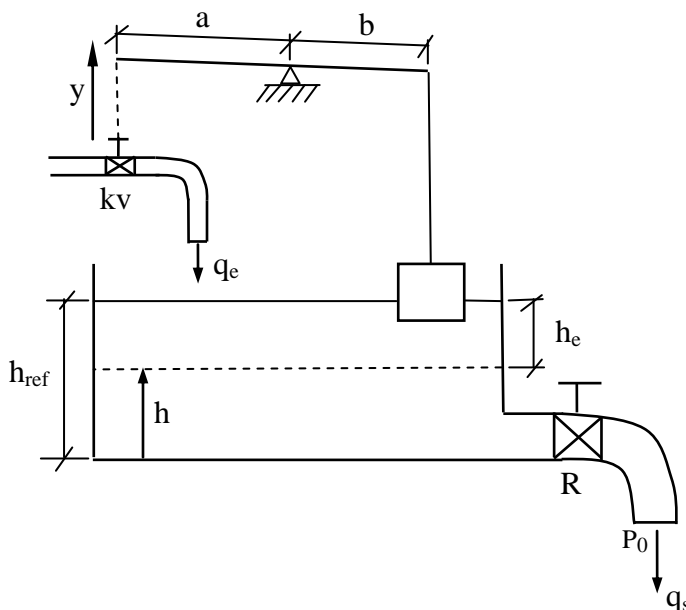
$$Q_{e(s)} = Q_{alm(s)} + Q_{s(s)}$$

$$Q_{alm(s)} = S \cdot C \cdot \gamma \cdot H_{(s)}$$

$$Q_{s(s)} = \frac{\gamma}{R} \cdot H_{(s)}$$



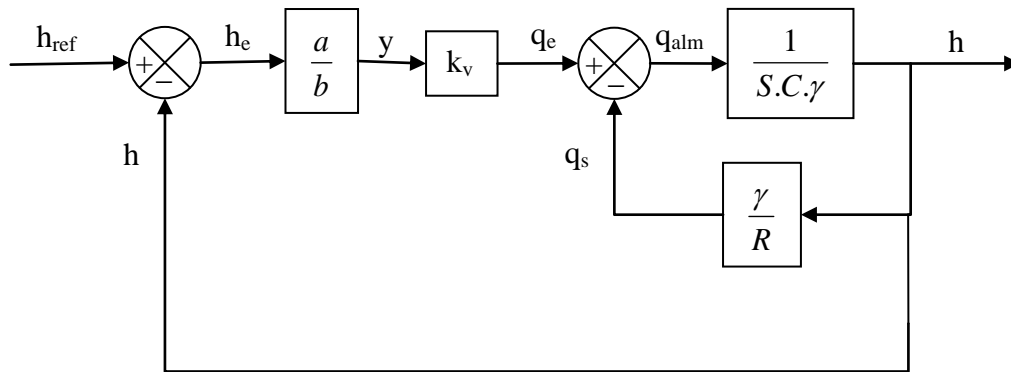
Ejemplo:



$$q_e = k_v \cdot y$$

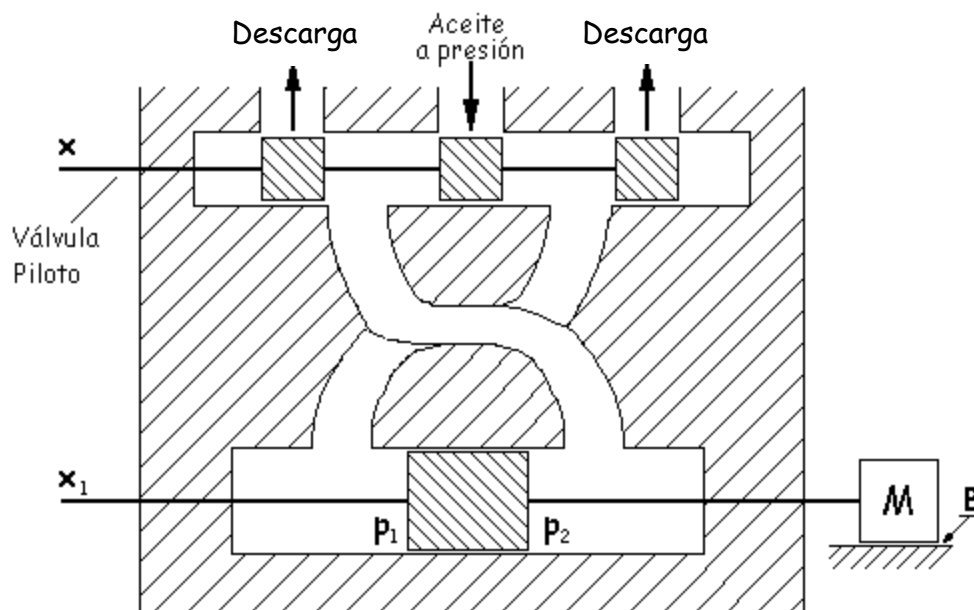
$$h_{ref} - h = h_e \quad \text{error}$$

$$\frac{y}{a} = \frac{h_{ref} - h}{b}$$



Para variar  $h_{ref}$  habría que variar la altura del punto de apoyo de la palanca.

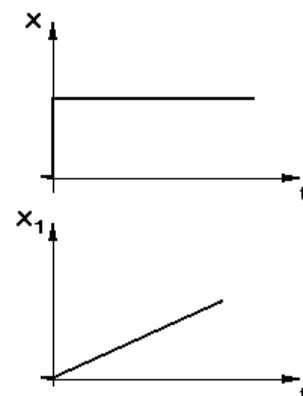
**Actuador hidráulico lineal**



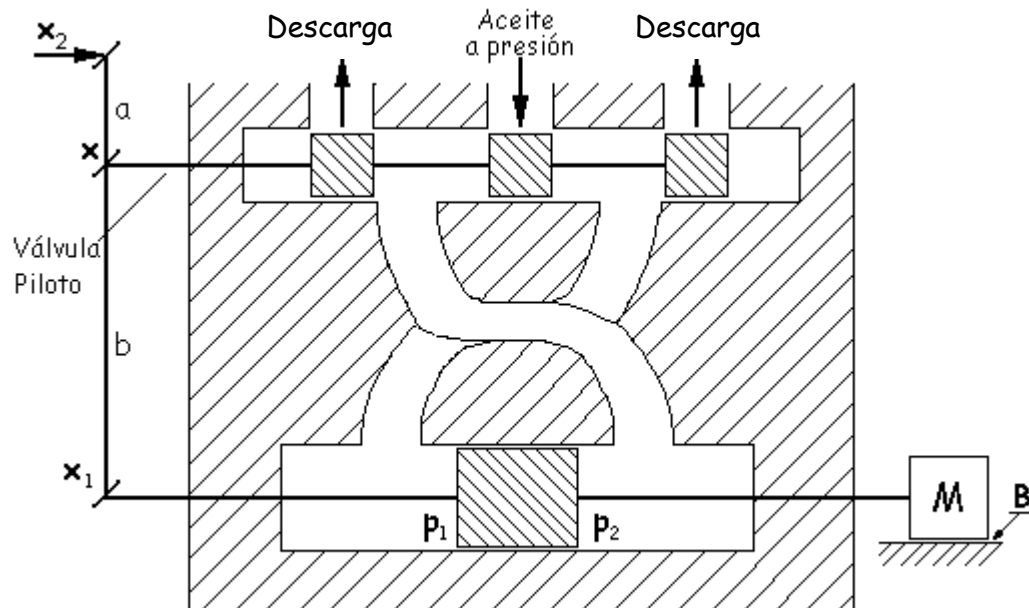
Se puede demostrar que la transferencia de este sistema es:

$$\frac{X_1}{X}(s) = \frac{Kh}{s(1 - \zeta hs)}$$

si  $\zeta h \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{X_1}{X}(s) \cong \frac{Kh}{s} \rightarrow$  Relación integral



Agregando un sistema de palanca, acorde con la siguiente figura:



La transferencia será ahora:

$$\frac{X_1}{X_2}(s) = \frac{b/a}{1 + S.\zeta p}$$

Si  $\zeta p \rightarrow 0$ , lo cual en la práctica es fácil de lograr:

$$\frac{X_1}{X_2}(s) \cong \frac{b}{a} \rightarrow \text{relación lineal}$$

## ACTUADORES ELECTROMECAÑICOS

Producen una potencia mecánica en base a una potencia eléctrica o viceversa (motores ó generadores). Existen con movimiento de rotación y traslación y por ser dispositivos de potencia generalmente se encuentran en la parte final de la cadena directa del lazo de realimentación.

### Control de velocidad en motores eléctricos

Entre todas las aplicaciones posibles de la electrónica de potencia, merece especial atención la variación de velocidad de motores eléctricos. Los variadores de velocidad constituyen, en efecto, un campo de aplicación de los convertidores estáticos particularmente importante; su estudio nos permitirá, además, ver mejor las posibilidades que ofrecen los convertidores estáticos.

Los equipos industriales utilizan cada día más arrastres de velocidad variable. Ello es debido, en parte, a la necesidad de dar al dispositivo arrastrado, la velocidad óptima en cada una de las fases de un proceso. Pero sobre todo es debido a los progresos realizados en la automatización que requiere realimentar la velocidad de cada uno de los motores que actúan sobre diversos puntos de un mismo conjunto.

La obtención de velocidades variables, a partir de la red trifásica de frecuencia constante que constituye normalmente la fuente de energía eléctrica disponible, se realiza actualmente en excelentes condiciones mediante el conjunto formado por rectificadores con tiristores y motor de corriente continua.

Por otra parte, con los recientes adelantos en la conversión de energía, las técnicas de control y las microcomputadoras, las propulsiones de motores de CA se vuelven cada vez más competitivas en relación con las propulsiones de CC.

Debido a esto, cada día hay más interés en los variadores de velocidad para motores asíncronos, basados en la modulación de ancho de pulsos (PWM), los cuales están cubriendo gran parte de las aplicaciones, pero aún quedan algunas aplicaciones que solamente las pueden cubrir los motores de CC.

Aunque la tendencia futura mira hacia las propulsiones de CA, quizás pasen algunos años hasta que los variadores de velocidad para control de motores asíncronos desplace totalmente a los variadores para motores de CC.

Los motores de CC, pueden proporcionar un alto par motor de arranque y también permiten el control de la velocidad en un amplio rango. Los métodos de control de la velocidad, por lo general son más simples y menos costosos que los de los variadores de CA. Los motores de CC juegan un papel significativo en las propulsiones industriales.

Tanto los motores de CC excitados en serie como los de excitación independiente se utilizan normalmente con controladores de velocidad variable, aunque tradicionalmente los motores en serie se han utilizado para aplicaciones de tracción. Debido a los elementos de conmutación, los motores de CC no son adecuados para aplicaciones de muy alta velocidad y requieren más mantenimiento que los motores de CA.

Los rectificadores controlados proporcionan una tensión de salida de CC variable a partir de una tensión fija de CA. Los rectificadores controlados y los pulsados tienen una gran aplicación en el control industrial y en las propulsiones de velocidad variable, con niveles de potencia que van desde fracciones de KW hasta varios megavatios.

Por lo general, los rectificadores controlados se utilizan para controlar la velocidad de los motores de CC tal y como se muestra en la figura 1.

Una alternativa sería un rectificador de diodos seguido por un pulsador (ó PWM), como el que se muestra en la figura 2.

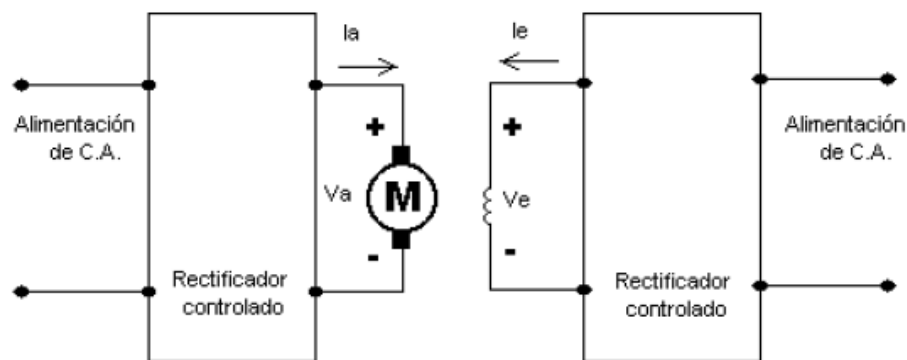


Figura N°1

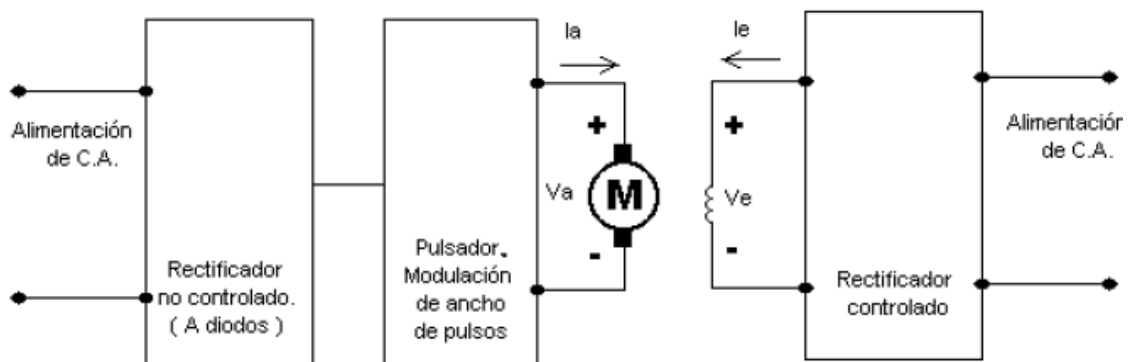


Figura N° 2

Otro caso, similar al de la figura N°2, lo constituye la propulsión de trolebuses o trenes de ferrocarril, donde la alimentación es de corriente continua a través de una línea, mientras el pulsador se encuentra instalado junto al motor del vehículo.

En este caso, en lugar de usar rectificadores controlados, se usan troceadores y la regulación de la tensión se hace a través de PWM. La disposición se vé en la figura N°3.

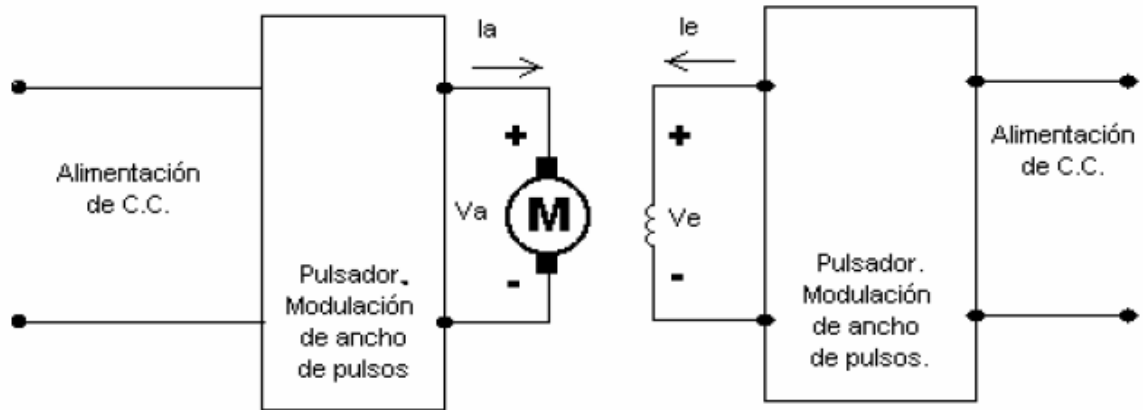


Figura N°3

**Motor de corriente continua**

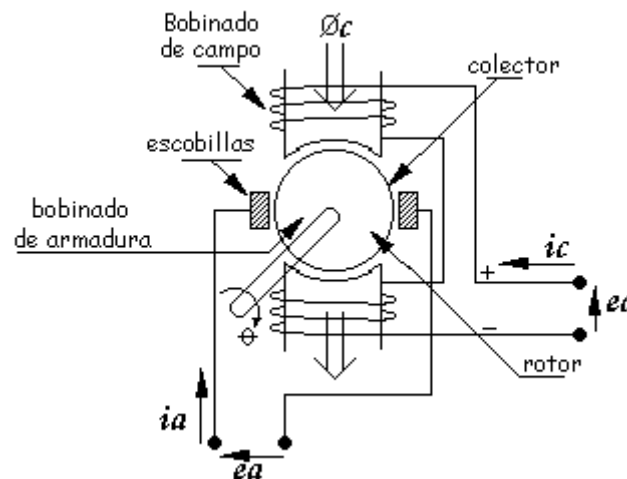


Figura N°4

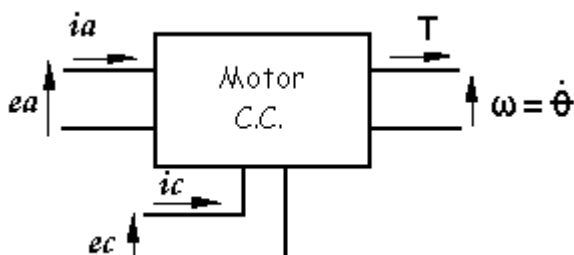
El colector se compone por delgas (contactos de cobre), conectadas a los extremos de bobinas que componen la armadura. Al girar el rotor, las escobillas van haciendo contacto con las delgas y de esta manera hacen llegar la tensión al bobinado de armadura.

Fuerza en cada espira del rotor:  $F = B \cdot i_a \cdot \ell$

Donde: B= Inducción magnética del bobinado de campo

$i_a$ = Intensidad de corriente de armadura

$\ell$ = longitud de las espiras que cortan líneas de fuerza del campo



Si  $i_c = \text{cte} \Rightarrow$  control por armadura

Si  $i_a = \text{cte} \Rightarrow$  control por campo



Ecuaciones que intervienen en el motor:

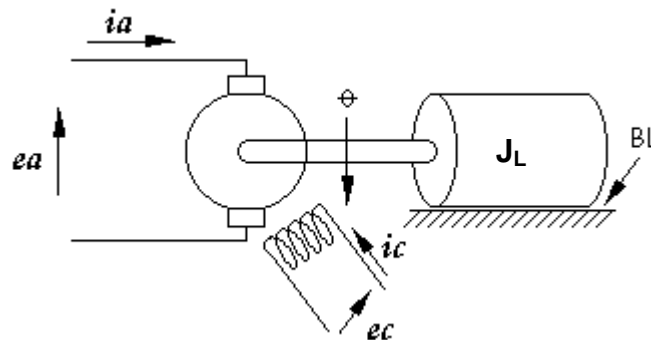
$$T = F \cdot r (\text{radio rotor}) \cdot N (\text{N}^\circ \text{ espiras}) = B \cdot i_a \cdot l \cdot r \cdot N = \frac{\Phi c (\text{flujo magn.})}{A (\text{área espira})} \cdot i_a \cdot l \cdot r \cdot N$$

$$T = K_1 \cdot i_a \cdot \Phi c$$

$$e_{cem} = e_b = K_2 \cdot \omega \cdot \Phi c$$

En estas ecuaciones,  $K_1$  y  $K_2$  son constantes constructivas del motor.

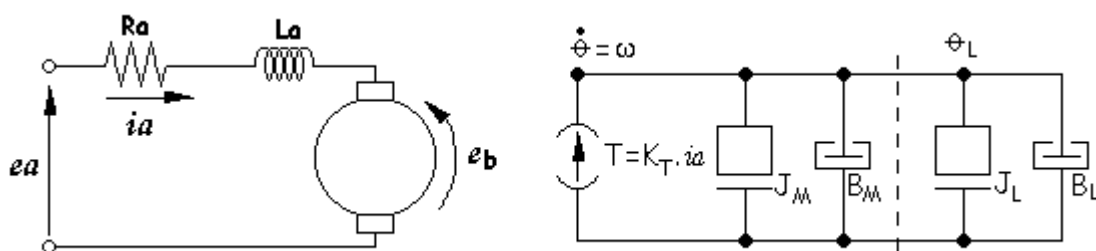
### Control por armadura



Si  $i_c = \text{cte} \Rightarrow \Phi c = \text{cte}$

$$\begin{cases} T = K_T \cdot i_a \rightarrow K_T = \frac{T}{i_a} = \left[ \frac{\text{N.m}}{\text{A}} \right] \\ e_b = K_b \cdot \omega \rightarrow K_b = \frac{e_b}{\omega} = \left[ \frac{\text{V}}{\text{r/s}} \right] \end{cases}$$

Circuito equivalente:



$$P_{el} = P_{mec}$$

$$i_a \cdot e_b = T \cdot \omega$$

$$\frac{T}{K_T} \cdot K_b \cdot \omega = T \cdot \omega \Rightarrow K_b = K_T$$

Lado eléctrico:

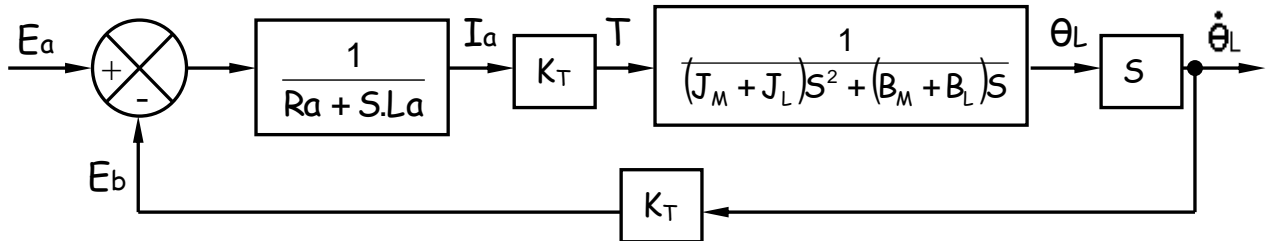
$$E_a(s) = (R_a + S \cdot L_a) i_a(s) + E_b(s)$$

$$E_b(s) = K_T \dot{\theta}_L(s)$$



Lado mecánico:

$$T(s) = K_T \cdot I_a(s) = \underbrace{(J_M \cdot S^2 + B_M \cdot S)}_{\text{Motor}} \cdot \theta_L(s) + \underbrace{(J_L \cdot S^2 + B_L \cdot S)}_{\text{Carga}} \cdot \theta_L(s)$$



$$\frac{\dot{\theta}_L(s)}{E_a} = \frac{S \cdot K_T}{(Ra + SLa) \left[ \underbrace{(J_M + J_L)}_J s^2 + \underbrace{(B_M + B_L)}_B s \right] + S \cdot K_T^2}$$

$$\frac{\dot{\theta}_L(s)}{E_a} = \frac{K_T}{(Ra + SLa)(J \cdot S + B) + K_T^2} = \frac{K_T}{Ra \left( 1 + S \frac{La}{Ra} \right) B \left( 1 + S \frac{J}{B} \right) + K_T^2}$$

Como vemos, esta transferencia presenta un denominador de orden 2; es decir, 2 constantes de tiempo, una de naturaleza eléctrica y la otra mecánica. Para simplificar el resultado, asumiremos que en general se cumple que:

$$\frac{X_{La}}{\omega La} \ll Ra \quad \therefore$$

$$\frac{\dot{\theta}_L(s)}{E_a} = \frac{K_T}{B \cdot Ra \left( S \cdot \frac{J}{B} + 1 \right) + K_T^2} = \frac{K_T}{S \cdot J \cdot Ra + (B \cdot Ra + K_T^2)}$$

$$= \frac{\frac{K_T}{B \cdot Ra + K_T^2}}{\left( S \frac{J \cdot Ra}{B \cdot Ra + K_T^2} + 1 \right)} = \frac{K_m}{S \cdot \tau_{em} + 1} \quad \text{la cual presenta ahora un denominador de orden 1 (una única constante de tiempo)}$$

Siendo:  $\tau_{em} = \frac{J \cdot Ra}{B \cdot Ra + K_T^2} = \frac{J}{B + \frac{K_T^2}{Ra}}$  la cte. de tiempo electromecánica  
 $\frac{Ra}{B_e} \Rightarrow$  Amortiguamiento de naturaleza electromecánica

y:  $K_m = \frac{K_T}{B \cdot Ra + K_T^2}$  la Ganancia del motor

Si  $e_a = E_{a0} \cdot \mu(t) \Rightarrow E_a(s) = \frac{E_{a0}}{S}$



$$\dot{\theta}_{L(s)} = Ea(s) \cdot \frac{\dot{\theta}_L(s)}{Ea} = \frac{Ea_0}{S} \cdot \frac{K_m}{S \cdot \tau_{em} + 1}$$

Velocidad inicial:  $\dot{\theta}(t \rightarrow 0) = \lim_{s \rightarrow \infty} S \cdot \dot{\theta}(s) = \frac{Ea_0 \cdot K_m}{S \cdot \tau_{em} + 1} \Big|_{s \rightarrow \infty} = 0$

Velocidad final:  $\dot{\theta}(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} S \cdot \dot{\theta}(s) = \frac{Ea_0 \cdot K_m}{S \cdot \tau_{em} + 1} \Big|_{s \rightarrow 0} = Ea_0 \cdot K_m$

La velocidad del motor puede ser controlada mediante la variación de  $E_a$ , manteniendo  $E_c$  constante. Entonces cuando la tensión aplicada a la armadura se eleva, la velocidad se elevará. La pérdida por la resistencia de la armadura es pequeña y la velocidad del motor sube casi proporcionalmente con la tensión aplicada a la armadura. Pero hay un límite a la tensión que puede aplicarse a la armadura y ese límite es la tensión máxima permisible para la armadura, es la tensión nominal de la máquina.

La velocidad del motor corresponde a la tensión de la armadura y a la tensión del campo determinado. Así la velocidad de un motor puede variarse debajo de su velocidad máxima, controlando la tensión de la armadura. Sería deseable que el motor pueda desarrollar un torque tan alto como sea posible, lo que se logra con la máxima tensión aplicada al campo. Aplicando una tensión más alta al campo, dado que este está cerca de la saturación, no se logra un aumento significativo del torque. Por otra parte, esto sólo produciría aumento de pérdidas en el bobinado. Dado que el calor total que desarrolla el motor de CC es un valor fijo que depende de la superficie de disipación y del sistema de enfriamiento, si aumentamos las pérdidas en el bobinado de campo, se debe disminuir la potencia disipada en la armadura, con lo que el resultado final puede ser una disminución en el torque.

Aumentar la tensión de armadura sobre su valor nominal, no se recomienda porque ésta se diseña para dicho valor, entre otros puede haber problemas con la aislación. El torque que el motor puede entregar depende de la corriente de armadura y de la corriente del campo.

Si el motor se opera continuamente, la corriente de armadura máxima no debe ser más alta que su valor nominal. Cuando las corrientes de armadura y de campo están en su nivel nominal, el motor genera el torque nominal. El torque máximo que el motor puede entregar continuamente por un largo período de tiempo, es el de su valor nominal y la velocidad debe cumplir que no exceda el valor máximo. O sea que debe ser:

$$0 < \omega < \omega_{nom} \quad \text{donde } \omega_{nom} \text{ es la velocidad nominal del motor}$$

La potencia desarrollada por el motor es:

$$Pa_{m\acute{a}x} = Tm_{m\acute{a}x} \cdot \omega$$

El torque máximo que el motor puede entregar continuamente se llama  $Tm_{max,cont}$ . Lo que se está mostrando en la ecuación, es el torque máximo que el motor puede entregar, y no el torque real que el motor entrega. El torque real que el motor entrega depende de la carga mecánica conectada a su eje. Si la velocidad del motor es aumentada más allá de su valor nominal, ésta puede lograrse manteniendo la tensión de la armadura en su valor nominal y debilitando el campo reduciendo la tensión aplicada a él. Cuando la velocidad del motor se aumenta de esta manera, la potencia máxima que puede desarrollar la armadura es fija. Eso significa que el torque máximo que el motor puede desarrollar sobre la velocidad nominal es:

$$Tm_{max,cont} = \frac{Ea_{nom} \cdot Ia_{nom}}{\omega} \quad \text{donde } \omega > \omega_{nom}$$

Los diagramas de  $Pa_{max}$  y  $Tm_{max}$ , pueden expresarse en función de la velocidad, como se observa en la siguiente figura.

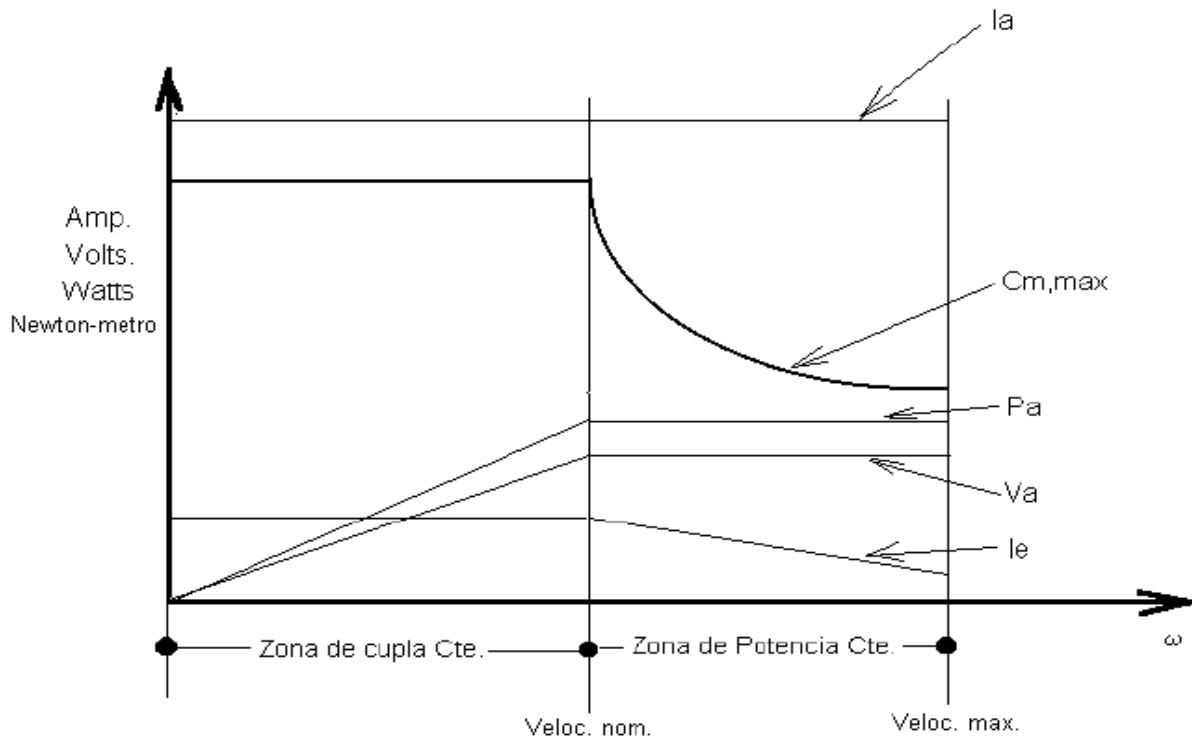


Figura N°5

En la figura N°5 se pueden observar los valores máximos que el motor puede admitir. El diagrama se puede dividir en dos zonas de funcionamiento, la primera es la de "Cupla cte." Y la segunda de "Potencia cte." En la zona de Cupla cte. la corriente de armadura  $I_a$  es cte., la corriente de excitación también es cte. por lo tanto lo será la cupla. Se entiende que estos son valores máx. de cupla que el motor puede entregar, pero la cupla la determina la carga. La potencia dependerá de la tensión de armadura y de la velocidad que es una función casi directa de esta tensión. Cuando llegamos a la velocidad nominal, estamos en ese punto a la potencia máxima que el motor puede entregar, pero en general, los motores pueden desarrollar mayor velocidad, siempre y cuando no se sobrepase la potencia máxima. Para cumplir con estas exigencias, podemos mantener la tensión de armadura y disminuir la corriente de excitación. Esto hará que la velocidad aumente, pero la cupla máxima irá decreciendo como se ve en la Figura N°5. Esta zona donde la corriente de excitación es decreciente y la tensión de armadura es cte, se llama de Potencia cte. En la figura N°6, podemos ver un sistema de control de un motor de CC en lazo abierto.

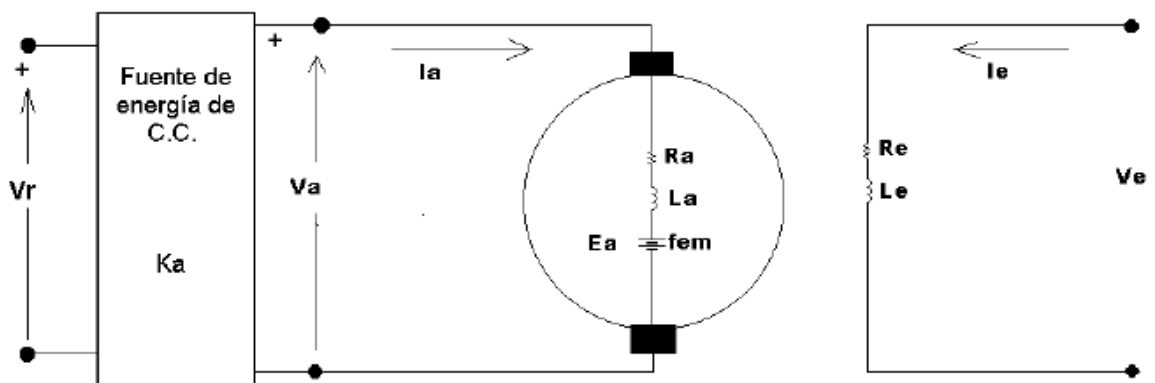


Figura N°6

La etapa de potencia para impulsar un Motor de C.C. puede ser de variados diseños. Si ésta es de poca potencia, en el orden del vatio hasta varios cientos de vatios, puede ser a transistores debido a su fácil manejo. Si la potencia es mayor, en el orden de varios kilovatios, ya es conveniente el uso de tiristores. Estos pueden estar alimentados de una fuente monofásica o trifásica según la potencia del motor a impulsar. Hasta el orden de los 3 kilovatios, puede ser monofásica. Para mayores potencias ya debe ser trifásica.

**Ejemplo:**

Un motor controlado por armadura se alimenta con 100 V y consume en régimen permanente 10 A, girando a 1200 rpm y entregando una potencia mecánica de 900 W. Las pérdidas mecánicas se han considerado dentro de la potencia entregada. Determinar:

- a) El valor de la resistencia de armadura.
- b) La nueva velocidad en rpm si se intercala en serie con la armadura una resistencia de 4Ω.
- c) El valor de la nueva corriente de armadura.
- d) El valor del nuevo par de arranque
- e) El amortiguamiento total visto por el motor.

Repaso fórmulas y diagrama de aplicación:

$$P_a = E_a \cdot I_a \quad (1)$$

$$P_a = P_{em} + P_{pa} \quad (2)$$

$$P_{pa} = I_a^2 \cdot R_a \quad (3)$$

$$P_{em} = T_m \cdot \omega = B_{mec} \cdot \omega^2 \quad (4)$$

$$P_{em} = E_b \cdot I_a \quad (5)$$

$$E_b = K_T \cdot \omega \quad (6)$$

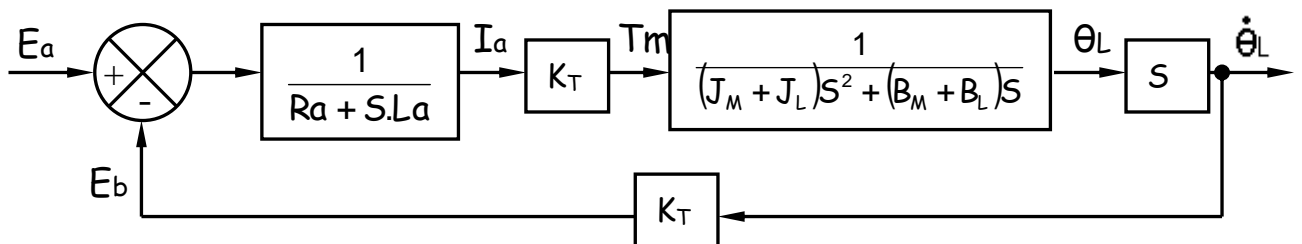
$$K_m = \frac{K_T}{B_{mec} R_a + K_T^2} \quad (7)$$

$$T_m = B_{mec} \cdot \omega \quad (8)$$

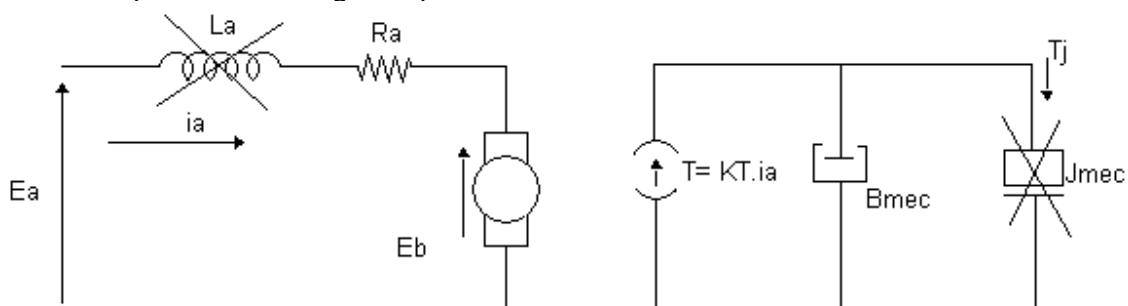
$$T_m = K_T \cdot I_a \quad (9)$$

$$B_e = \frac{K_T^2}{R_a}$$

$$B_{tot} = B_{mec} + B_e$$



Circuito equivalente en régimen permanente:





a) De (1):  $P_a = 100 \text{ V} \cdot 10 \text{ A} = 1000 \text{ W}$

$$\begin{aligned} \text{De (2): } P_{pa} &= P_a - P_{em} \\ &= 1000 \text{ W} - 900 \text{ W} \\ &= 100 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\text{De (3): } R_a = \frac{P_{pa}}{I_a^2} = \frac{100 \text{ W}}{(10 \text{ A})^2} = 1 \Omega$$

b)  $R_a = 4 \Omega + 1 \Omega = 5 \Omega$

$$\omega f = K_m \cdot E_a$$

$$\begin{aligned} \text{De (4): } B_{mec} &= \frac{P_{em}}{\omega f^2} = \frac{900 \text{ W}}{(125,67 \text{ rad/seg})^2} \\ &= 0,057 \frac{\text{ws}^2}{\text{rad}^2} \end{aligned}$$

$$\text{De (5): } E_b = \frac{P_{em}}{I_a} = \frac{900 \text{ W}}{10 \text{ A}} = 90 \text{ V}$$

$$\text{De (6): } K_T = \frac{E_b}{\omega f} = \frac{90 \text{ v}}{125,67 \text{ r/s}} = 0,716 \frac{\text{vs}}{\text{rad}}$$

$$\begin{aligned} \text{De (7): } K_m &= \frac{K_T}{B_{mec} R_a + K_T^2} \\ &= \frac{0,716 \frac{\text{vs}}{\text{rad}}}{0,057 \frac{\text{vs}^2}{\text{r}^2} 5 \Omega + (0,716 \text{ vs/r})^2} = 0,897 \frac{\text{r}}{\text{vs}} \end{aligned}$$

$$\therefore \omega f = 0,897 \frac{\text{r}}{\text{vs}} \times 100 \text{ v} = 89,7 \text{ r/s} = 857 \text{ rpm}$$

c) De (9):  $I_a = \frac{T_m}{K_T} = \frac{5,11 \text{ J}}{0,716 \text{ V.s/r}}$

$$I_a = 7,14 \text{ A}$$

d) De (8):  $T = B_{mec} \cdot \omega f = 0,057 \frac{\text{ws}^2}{\text{r}^2} \cdot 89,7 \text{ r/s} = 5,11 \text{ Joule}$

$$\text{e) } B_e = \frac{K_T^2}{R_a} = \frac{(0,716 \frac{\text{vs}}{\text{rad}})^2}{5 \Omega} = 0,102 \frac{\text{ws}^2}{\text{r}^2}$$

$$B_{tot} = B_{mec} + B_e = 0,057 \frac{\text{ws}^2}{\text{r}^2} + 0,102 \frac{\text{ws}^2}{\text{r}^2} = 0,159 \frac{\text{ws}^2}{\text{r}^2}$$